Práctica 7 -Convergencia Uniforme-

Ejercicio 1.

1. Hallar el límite puntual de la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida sobre $A \subseteq \mathbb{R}$.

   (a) $f_n(x) = \ x^n \quad A = (-1, 1]$

   (b) $f_n(x) = \ \frac{e^x}{x^n} \quad A = (1, +\infty)$

   (c) $f_n(x) = \ n^2x(1-x^2)^n \quad A = [0, 1]$

2. Para i) demostrar que la convergencia es uniforme en $A = (0, 1/2]$, idem en ii) con $A = [2, 5]$¿ Es uniforme la convergencia de iii) en A o en algún sub-intervalo de A?

Ejercicio 2. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones:

1. $f_n(x) = \dfrac{\sin\ nx}{n}, \ x \ \in \mathbb{R}$
2. $f_n(x) = \text{sen}\left(\dfrac{x}{n}\right), \ x \ \in \mathbb{R}$
3. $f_n(z) = \dfrac{n}{n+1}z, \ z \ \in \mathbb{C}$
4. $f_n(z) = nz^2, \ z \ \in \mathbb{C}$

Ejercicio 3. Probar que cualquier sucesión de funciones acotadas uniformemente convergente, está uniformemente acotada.

Ejercicio 4. Dada $f_n(x) = \dfrac{x}{1+x^2} - \dfrac{(x^2+1)x}{1+(n+1)^2x^2}$, probar que converge puntualmente pero no uniformemente a una función continua.

Ejercicio 5. Sea (X, d) un espacio métrico. Si $(f_n) : X \to \mathbb{R}$ y $(g_n) \subset: X \to \mathbb{R}$ convergen uniformemente en $E \subset X$, probar que $(f_n + g_n)$ converge uniformemente en E. Si además (f_n) y (g_n) son uniformemente acotadas, entonces $(f_n g_n)$ es uniformemente convergente. Mostrar con un ejemplo que esta última restricción es necesaria.

Ejercicio 6.

1. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones con $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, cada una de ellas derivable, que converge uniformemente a una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y f_n' converge uniformemente a una función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.Probar que f es derivable y que $f' = g$.

2. Sea $\sum_{k=0}^{\infty} f_n(x)$ una serie de funciones. ¿ Con qué hipótesis es legítimo derivarla término a término ?

3. Probar que la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen(nx)}}{n^2}$$
converge uniformemente en $\mathbb{R}$, pero que esto no ocurre para la serie obtenidaderivando término a término.

Ejercicio 7. Hallar (y justificar) los conjuntos en $\mathbb{R}$ de convergencia puntual, uniforme y no convergencia de las siguientes series:
$(a)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n \quad (b)\sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n \quad (c)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (d)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$
¿ Qué ocurre con la serie que se obtiene derivando término a término ?

Ejercicio 8. Consideramos la función dada por la serie:
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$
Probar que la serie converge uniformemente en cada intervalo $(1+\varepsilon, \infty)$ hacia una función continua , y que es posible derivarla término a término en dicho intervalo.

Ejercicio 9. (Teorema de Dini) Sea K compacto y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(K)$ que converge puntualmente a $f \in C(K)$. Para cada $x \in K$ setiene $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$. Probar que f_n converge uniformemente en K.