

## PRÁCTICA 8 -TEOREMAS DE PUNTO FIJO-

**Ejercicio 1.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo y sea  $f : X \rightarrow X$ . Probar que la condición

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

no es suficiente para garantizar la existencia de un punto fijo de  $f$ , pero que sí lo es si  $X$  es compacto.

**Ejercicio 2.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función derivable tal que  $|f'(x)| \leq \alpha < 1$ . Probar que  $f$  tiene un único punto fijo.

**Ejercicio 3.** Considere la siguiente ecuación integral no lineal:

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y; f(y)) dy + \varphi(x)$$

con  $K$  y  $\varphi$  continuas, tal que  $K$  satisface la condición de Lipschitz en la tercer variable :

$$|K(x, y; z_1) - K(x, y; z_2)| \leq M|z_1 - z_2|$$

Probar que la ecuación integral tiene solución única para todo

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}.$$

Muestre una sucesión que converja a la solución.

**Ejercicio 4.** Sea  $f : [0, T] \times \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua y lipchitz en la segunda variable.

1.  $y \in (C[0, T], \Omega)$  es solución de la ecuación diferencial  $y'(t) = f(t, y(t))$  con la condición inicial  $y(0) = 0$  si y sólo si

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s)) ds \quad \forall t \in [0, T]$$

2. Probar que si  $T$  es suficientemente pequeño, existe una única solución de este problema.

**Ejercicio 5.** Sea  $X$  un espacio métrico completo y sea  $T : X \rightarrow X$  tal que existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $T^n$  es una contracción. Entonces existe un único  $x \in X$  tal que  $T(x) = x$ .

**Ejercicio 6.**

1. Probar que existe una única función continua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que es solución de la siguiente ecuación integral

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x, y) f(y) dy + \phi(x)$$

donde  $K : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas.

2. Sea  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  continua. Probar que las soluciones de

$$x'(t) = A(t)x(t)$$

están definidas para todo tiempo  $t$ .