Práctica 9 -Teorema de Baire y Diferenciación-

Baire

Ejercicio 1. Sea (X,d) espacio métrico. Se dice que un conjunto $A \subset X$ es *nunca denso* si $\overline{A}^{\circ} = \emptyset$.

1. Probar que si A es nunca denso, entonces $X - A$ es denso. Vale el recíproco?
2. Probar que si A es abierto y denso, entonces $X - A$ es nunca denso.

Ejercicio 2. Sea (X,d) espacio métrico y $A \subset X$. Probar que son equivalentes

1. A es nunca denso.
2. Toda bola B abierta contiene otra $B_1 \subset B$ abierta tal que $B_1 \cap A = \emptyset$
3. A no es denso en ninguna bola abierta.

Ejercicio 3. Sea $Lip[a,b] = \{f \in C[a,b] / \ \exists k > 0, \ |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|\}$.Probar que $Lip[a,b]^{\circ} = \emptyset$ en $C[a,b]$.

Ejercicio 4. Probar que el conjunto de funciones continuas que tienen algún intervalo de monotonía, tiene interior vacío en $C[a,b]$.

Diferenciación

Ejercicio 5. Para cada una de las siguientes funciones definidas en $\mathbb{R}^2$ analizar si existen las derivadas parciales, si son diferenciables y si son C^1.

$$f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$g(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$h(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^4}$$

si $(x,y) \neq (0,0)$. $f(0,0) = g(0,0) = h(0,0) = 0$

Ejercicio 6. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^1 donde Ω es un abierto convexo. Probar que $|f(x) - f(y)| \leq \|\nabla f(\xi)\| \|x-y\|$ donde ξ pertenece al segmento que une x e y.

Ejercicio 7.

1. Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funci'on de clase C^1, $S_a = \{x \in \mathbb{R}^n / \ f(x) = a\}$ y $x_0 \in S_a$. Probar que si $\nabla f(x_0) \neq 0$, entonces $\nabla f(x_0)$ es ortogonal a S_a en x_0 (i.e. $\nabla f(x_0)$ es ortogonal al hiperplano tangente a S_a que pasa por x_0).

2. (multiplicadores de Lagrange) Sean f y S_a como antes y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^1, entonces si x_0 es un mínimo (o máximo) de g restringida a S_a y si $\nabla f(x_0) \neq 0$, existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que: $\nabla g(x_0) = \lambda \nabla f(x_0)$.

Ejercicio 8.

1. Sea $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ dada por $T(f) = f^2$. Probar que T es diferenciable y que su diferencial está dada por $DT(f)(h) = 2f \cdot h$.

2. Sea $T : l^2 \to l^1$ dada por $(Tx)_n = x_n^2$. Probar que T es diferenciable y calcular su diferencial.

Varios

Ejercicio 9. Probar que $C[0,1]$ es separable.

Ejercicio 10. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua tal que

$$\int_0^1 f(x)x^n dx = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

Probar que entonces $f \equiv 0$ en $[0,1]$.

Un Parcial

Ejercicio 11. Sea K un em compacto y sean $f, f_n : K \to \mathbb{R}$ funciones tales que $f_n \rightrightarrows f$ en K. Probar que si f es continua y no se anula en ningún punto de K entonces $\exists n_0$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow \forall x \in K f_n(x) \neq 0$.

Ejercicio 12. Sean (X, d) un em, $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado y $f : A \to F$ una función uniformemente continua. Probar que $f(A)$ es totalemente acotado.

Ejercicio 13. Sea $T : C[-1,1] \to \mathbb{R}$ el operador lineal definido por $T(f) = f(0)$.

1. Decidir si T es continuo si en $C[-1,1]$ usamos la norma 1.

2. Decidir si T es continuo si en $C[-1,1]$ usamos la norma ∞.

3. Decidir si vale: $\forall f \in C[-1,1]$ y $\forall \varepsilon > 0$ $\exists g \in C[-1,1]$ tal que $g(0) = 0$ y $\wedge \parallel f - g \parallel < \varepsilon$

Ejercicio 14. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ una suceción tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|}$ converge.

1. Sea $K \subset \mathbb{C}$ compacto, probar que existe un n_0 tal que $n > n_0 \Rightarrow 2 \mid x \mid \leq a_n \forall x \in K$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x-a_n}$ converge absoluta y uniformemente en todo compacto que no contenga a ningún a_n.

Ejercicio 15. Sea $S = \{f \in C[0,1] : f(0) = 0, f(1) = 1\}$. Probar que existe una única $f \in S$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}f(3x) & \text{si} \quad 0 < x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad \frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2}f(3x-2) + \frac{1}{2} & \text{si} \quad \frac{2}{3} < x \leq 1 \end{cases}$$

Ejercicio 16. Sea S^1 el círculo unitario en el plano con la métrica usual. Sea $f : S^1 \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar que existe un $x \in S^1$ tal que $f(x) = f(-x)$.

Otro Parcial

Ejercicio 17. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = 3$ y $\lim\limits_{n\to-\infty} f(x) = 1$. Puede ocurrir que f no sea uniformemente continua?

Ejercicio 18. Sea E un Espacio Normado. Sea $S \subset E$ un subespacio tal que $\exists a \in S$ y $\exists \varepsilon > 0$ tq $B_\varepsilon(a) \subset S$. Probar que el subespacio no es propio.

Ejercicio 19. Sean $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{1+x^{2n}}$.

1. Hallar los $x \in \mathbb{R}$ tales que la serie converge.
2. Probar que si $a > 1 \Rightarrow$ la convergencia es uniforme en $[a, +\infty)$.
3. Es uniforme la convergencia en $(1,2)$?

Ejercicio 20. Sea (X,d) un espacio métrico, $A, B \subset X$ conexos e

$$Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \| (x,y) \|_2 < 1 \vee 1 < \| (x,y) \|_2 \leq 2 \vee 3 \leq \| (x,y) \|_2)\}.$$

Probar que si $f : A \cup B \to Y$ es continua entonces no es sobreyectiva.

Ejercicio 21. Sean f_n continuas en $[0,1]$ tales que $f_n \rightrightarrows f$. Decidir si vale la siguiente afirmación:
$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)dx \to_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$