

PRÁCTICA 1: NÚMEROS REALES

“Ahora bien, en cada caso cuando hay una cortadura $(A1, A2)$ que no es producida por ningún número racional, entonces creamos un nuevo número irracional; un número, que consideramos como completamente definido por esta cortadura; diremos que este número corresponde a la cortadura, o que produce esta cortadura.”

R. DEDEKIND, STETIGKEIT UND IRRATIONALE ZAHLEN, 1872.

Ejercicio 1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío acotado superiormente y sea $s \in \mathbb{R}$. Probar que

$$s = \sup A \iff \begin{array}{l} i) \quad s \text{ es cota superior de } A \\ ii) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : s - \varepsilon < a \leq s \end{array}$$

Ejercicio 2. Para cada $x \in \mathbb{R}$ se define $A_x = \{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$.

- i) Verificar que $A_x \neq \emptyset$ y es acotado superiormente. Concluir que existe el máximo de A_x . Este número se llama la *parte entera de x* y se notará $[x]$.
- ii) Demostrar que:
 - (a) $0 \leq x - [x] < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
 - (b) $[x] = x \iff x \in \mathbb{Z}$
 - (c) $[x + y] \leq [x] + [y] + 1$
 - (d) $x < y \Rightarrow [x] \leq [y]$

Ejercicio 3.

- i) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $y - x > 1$. Mostrar que existe un entero k tal que $x < k < y$.
- ii) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Mostrar que existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.
- iii) Sean $r, s \in \mathbb{Q}$ tales que $r > s$. Mostrar que existe un número irracional entre r y s .
- iv) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Mostrar que existe un número irracional entre x e y .

Ejercicio 4.

- i) Probar que para cada $x \in \mathbb{R}$, existe una sucesión $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ estrictamente decreciente tal que $q_n \geq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = x$.
- ii) Enunciar y probar un enunciado análogo donde $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sea estrictamente creciente.

Ejercicio 5. Sean $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ y $\varepsilon > 0$. Mostrar que existe $q = (q_1, \dots, q_m) \in \mathbb{Q}^m$ tal que $\|x - q\| = \left(\sum_{i=1}^m (x_i - q_i)^2 \right)^{1/2} < \varepsilon$.

Ejercicio 6. Sea $A = \left\{ \frac{m}{2^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$. Probar que A es denso en \mathbb{R} .

Analizar la misma situación para el conjunto $B = \left\{ \frac{m}{b^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$, donde $b \in \mathbb{R}_{>0}$.

Ejercicio 7. Sean $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones de números reales tales que

- i) $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, a_n \leq b_n \leq c_n$
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \ell$
- Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \ell$.

Ejercicio 8.

- i) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión monótona. Probar que:
- (a) Si existe una subsucesión $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente a $\ell \in \mathbb{R}$, entonces $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a ℓ . >Qué pasa si la subsucesión tiende a ∞ ?
- (b) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge $\iff (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada.
- ii) Demostrar que cualquier subsucesión de una sucesión convergente es también convergente.
- iii) Encontrar una sucesión **no** convergente $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que verifique $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a_{n+1}| = 0$.
- iv) Analizar la situación del inciso anterior pero con la condición: $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a_{n+p}| = 0$ para todo $p \in \mathbb{N}$ y estudiar si la respuesta contradice algún resultado conocido.

Ejercicio 9. Mostrar que en un cuerpo totalmente ordenado arquimediano son equivalentes las afirmaciones siguientes:

- i) Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.
- ii) Toda sucesión de Cauchy es convergente.
- iii) Si $(I_n)_{n \geq 1}$ es un encaje de intervalos cerrados cuyas longitudes tienden a cero, entonces existe un único $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.
- iv) Todo conjunto acotado superiormente y no vacío tiene supremo.
- v) Toda sucesión monótona y acotada superiormente tiene supremo.

Ejercicio 10. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y $(x_i)_{i \geq 0}, (y_j)_{j \geq 0}$ desarrollos de ambos en base $b > 1$. Se supone que el desarrollo de y es infinito, i.e., para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $i > n$ con $y_i > 0$.

- i) Probar que si $x_i = y_i$ para todo $i \leq n - 1$ y $x_n < y_n$, entonces $x < y$.
- ii) Deducir que el orden entre x e y es el mismo que el de los primeros términos en que difieren sus desarrollos.
- iii) Manteniendo las hipótesis de i), sea $z \in [x, y]$. Probar que entonces z tiene un desarrollo en base b con $z_i = x_i = y_i$ para todo $i \leq n - 1$.

Ejercicio 11. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada de números reales. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se considera $A_n = \{a_k : k \geq n\}$. Sean $\lambda_n = \sup A_n$ y $\gamma_n = \inf A_n$.

- i) Probar que $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente y $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente. Concluir que $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son sucesiones convergentes. Al límite de la sucesión $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$) lo llamaremos *límite superior* (resp. *límite inferior*) de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y lo notaremos $\limsup a_n$ (resp. $\liminf a_n$).
- ii) Sean $\alpha = \liminf a_n$ y $\beta = \limsup a_n$, y sea $\varepsilon > 0$. Probar que a la derecha de $\beta + \varepsilon$ y a la izquierda de $\alpha - \varepsilon$ existen finitos términos de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. >Vale la recíproca?

Ejercicio 12. Hallar los límites superior e inferior de las siguientes sucesiones:

i) $1, 3, -1, 1, 3, -1, 1, 3, -1, \dots$

ii) $(-1)^n \left(2 + \frac{3}{n}\right)$

iii) $\left(1 - \frac{1}{n}\right) \operatorname{sen} \left(n \frac{\pi}{2}\right)$

iv) $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por: $s_1 = 0$, $s_{2n} = \frac{s_{2n-1}}{2}$, $s_{2n+1} = \frac{1}{2} + s_{2n}$

v) $\frac{n}{3} - \left[\frac{n}{3}\right]$

Ejercicio 13.

i) Encontrar una sucesión $(x_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $\liminf x_n = -3$, $\limsup x_n = 5$ y el conjunto $\{x_n / n \in \mathbb{N}\}$ sea infinito.

ii) >Es cierto que

(a) si $\limsup x_n = 2$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > 1,99$ para todo $n \geq n_0$?

(b) si $\limsup x_n = b$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq b$ para todo $n \geq n_0$?

Ejercicio 14. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales acotada.

i) Probar que $\alpha = \limsup a_n$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ se verifica:

(a) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, $a_n < \alpha + \varepsilon$

(b) $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \geq n$ tal que $a_m > \alpha - \varepsilon$

ii) Demostrar que $\alpha = \limsup a_n$ si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes:

(a) Existe una subsucesión $(a_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_j} = \alpha$.

(b) Si $(a_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión convergente, entonces $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_j} \leq \alpha$

Ejercicio 15. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ acotada. Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$ si y sólo si $\limsup a_n = \liminf a_n = \ell$.

Ejercicio 16. Sean $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones reales acotadas. Probar que:

i) $\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$

ii) $\limsup(a_n \cdot b_n) \leq \limsup a_n \cdot \limsup b_n$, si $a_n, b_n \geq 0$

iii) si $c > 0$ entonces, $\limsup(c \cdot a_n) = c \cdot \limsup a_n$

Enunciar y probar resultados análogos para \liminf .

Ejercicio 17. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$.

i) Probar que: $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$

ii) Deducir que si existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \in \mathbb{R}_\infty$ entonces, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = A$.

iii) Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

Ejercicio 18. Sean $x, y \in [0, 1]$ dos números reales dados por sus desarrollos en base $b > 1$:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{b^i} \quad y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{b^i} \quad (0 \leq x_i, y_i < b - 1)$$

Se supone que el desarrollo de y es infinito, i.e. para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $i > n$ con $y_n > 0$.

1. Probar que si $x_i = y_i$ para todo $i \leq n - 1$, y $x_n < y_n$ entonces $x < y$.
2. Deducir que el orden entre x e y es el mismo que el de los primeros términos en que difieren en sus desarrollos.
3. Manteniendo las hipótesis de i), sea $z \in [x, y]$. Probar que entonces z tiene un desarrollo en base b con $z_i = x_i = y_i$ para todo $i \leq n - 1$.

Ejercicio 19. Hallar el desarrollo en base 2, 3 y 16 de los números 2.25, 10.7, 27 y 255.