Práctica 2: Cardinalidad

"Llamaremos número cardinal de M al concepto general que,
por medio de nuestra activa capacidad de pensar,
surge del conjunto M cuando hacemos abstracción
de la naturaleza y el orden de sus elementos.
Denotamos el resultado de este doble acto de abstracción por $\overline{\overline{M}}$"
Georg Cantor, 1895.

A. Propiedades básicas de los Conjuntos

Ejercicio 1. Demostrar las siguientes igualdades de conjuntos:

i) $B - \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(B - A_i)$

ii) $B - \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(B - A_i)$

iii) $\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B) = B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$

Ejercicio 2. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos y sea $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Hallar una familia de conjuntos $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que verifique simultáneamente:

– $B_n \subseteq A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$

– $B_k \cap B_j = \emptyset$ si $k \neq j$

– $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$

Ejercicio 3. Sea L un conjunto parcialmente ordenado en el cual todo subconjunto no vacío tiene máximo y mínimo. Probar que L es una cadena (o sea, un conjunto totalmente ordenado) finita.

Ejercicio 4. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función y sean A y B subconjuntos de X.

i) Demostrar que:

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
(b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

ii) Generalizar al caso de uniones e intersecciones infinitas.

iii) Exhibir un ejemplo donde la inclusión en i) (b) sea estricta.

Ejercicio 5. Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función, $A \subseteq X$ y $B, B_1, B_2 \subseteq Y$. Demostrar que:

i) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

ii) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

iii) $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$

iv) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

v) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

Generalizar iv) y v) al caso de uniones e intersecciones infinitas.

Ejercicio 6. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que $f(f^{-1}(B)) = B$ para cada $B \subseteq Y$ si y sólo si f es suryectiva.

Ejercicio 7. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que las siguientes propiedades son equivalentes:

i) f es inyectiva

ii) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ para todo $A, B \subseteq X$

iii) $f^{-1}(f(A)) = A$ para todo $A \subseteq X$

iv) $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ para todo par de subconjuntos A, B tales que $A \cap B = \emptyset$

v) $f(A - B) = f(A) - f(B)$ para todo $B \subseteq A \subseteq X$

Ejercicio 8. Para cada subconjunto S de un conjunto A dado se define la *función característica de* S, $\mathcal{X}_S : A \longrightarrow \{0, 1\}$, por

$$\mathcal{X}_S(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in S \\ 0 & \text{si } a \notin S \end{cases}$$

Probar que:

i) $\mathcal{X}_{S\cap T} = \mathcal{X}_S \cdot \mathcal{X}_T$ para todo par de subconjuntos $S, T \subseteq A$

ii) $\mathcal{X}_{A-S} = 1 - \mathcal{X}_S$ para todo $S \subseteq A$

iii) $\mathcal{X}_S \; + \; \mathcal{X}_T = \mathcal{X}_{S\cup T} \; + \; \mathcal{X}_{S\cap T}$ para todo $S, T \subseteq A$

Ejercicio 9. Sea A un cadena (o sea, un conjunto con un orden total) y sea B un conjunto parcialmente ordenado. Sea $f : A \rightarrow B$ una función inyectiva para la cual si $a, b \in A$ y $a \leq b$, entonces $f(a) \leq f(b)$. Probar que $f(a) \leq f(b)$ implica $a \leq b$.

Ejercicio 10. Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A. Para cada $a \in A$ se define el conjunto $S_a = \{b \in A \;/\; a \sim b\}$. Probar que:

i) Para todo par de elementos $a_1, a_2 \in A$ vale: $S_{a_1} = S_{a_2}$ o $S_{a_1} \cap S_{a_2} = \emptyset$

ii) $A = \bigcup_{a \in A} S_a$

B. Cardinalidad

"Nadie podrá expulsarnos del paraiso que Cantor ha creado para nosotros"
David Hilbert

Ejercicio 11. Demostrar que si A es un conjunto de n elementos, entonces $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos.

Ejercicio 12. Sea A un conjunto. Probar que son equivalentes:

i) A es infinito (*i.e. tiene un subconjunto en biyección con* $\mathbb{N}$*)*

ii) Para todo $x \in A$*, existe una función* $f_x : A \to A - \{x\}$ *biyectiva*

iii) Para todo $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset A$*, existe una función* $f_{\{x_1,\ldots,x_n\}} : A \to A - \{x_1, \ldots, x_n\}$ *biyectiva.*

Ejercicio 13. Sea A un conjunto numerable. Supongamos que existe una función sobreyectiva de A en un conjunto B. Probar que B es contable.

Ejercicio 14. Probar que los siguientes conjuntos son numerables (es decir, tienen cardinal $\aleph_0$):

$$\mathbb{Z}_{\leq -1} \quad ; \quad \mathbb{Z}_{\geq -3} \quad ; \quad 3.\mathbb{N} \quad ; \quad \mathbb{Z} \quad ; \quad \mathbb{N}^2 \quad ; \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad ; \quad \mathbb{Q} \quad ; \quad \mathbb{N}^m \quad (m \in \mathbb{N})$$

Ejercicio 15.

i) Sean A y B conjuntos contables. Probar que $A \cup B$ es contable.

ii) Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos contables. Probar que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es contable.

iii) Sea $\mathcal{A}$ un conjunto finito y $\mathcal{S} = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{A}^m$. Probar que $\sharp(\mathcal{S}) = \aleph_0$.

Deducir que, cualquiera sea el alfabeto utilizado, hay más números reales que palabras para nombrarlos. ¿Cuántos subconjuntos de $\mathbb{N}^2$ pueden ser definidos en un lenguaje fijo? ¿Cuántos hay en total?

Ejercicio 16. Sean A y B conjuntos, A infinito y B numerable. Probar que:

i) Existe una biyección entre $A \cup B$ y A

ii) Si A no es numerable y $B \subseteq A$, entonces existe una biyección entre $A - B$ y A.

¿Es numerable el conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$?

Ejercicio 17. Probar que el conjunto de todos los polinomios con coeficientes racionales es numerable.

Ejercicio 18. Se dice que un número complejo z es *algebraico* si existen enteros $a_0, \ldots, a_n$ no todos nulos, tales que

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = 0$$

i) Demostrar que el conjunto de todos los números algebraicos es numerable.

ii) Deducir que existen números reales que no son algebraicos.

Nota: Estos números se llaman *trascendentes*.

Ejercicio 19. Sea $X \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ un conjunto de números reales positivos. Supongamos que existe una constante positiva C tal que para cualquier subconjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ vale $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq C$. Probar que X es contable.

Ejercicio 20. * Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función monótona. Probar que:

$$\sharp(\{x \in \mathbb{R} \ / \ f \text{ no es continua en } x\}) \leq \aleph_0$$

Ejercicio 21. Probar que si A es un conjunto numerable, el conjunto de las partes finitas de A (es decir, el subconjunto de $\mathcal{P}(A)$ formado por los subconjuntos finitos de A) es numerable.

Ejercicio 22. Hallar el cardinal de los siguientes conjuntos de sucesiones:

i) $\{(a_n) \ / \ a_n \in \mathbb{N} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$

ii) $\{(a_n) \subset \mathbb{N} \ / \ a_n \leq a_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$

iii) $\{(a_n) \subset \mathbb{N} \ / \ a_n \geq a_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$

iv) $\{(q_n) \subset \mathbb{Q} \ / \ \lim\limits_{n\to\infty} q_n = 0\}$

v) $\{(q_n) \subset \mathbb{Q} \ / \ (q_n) \text{ es periódica}\}$

vi) $\{(a_n) \subset \mathbb{N} \ / \ 1 \leq a_n \leq m \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\} \qquad (m \in \mathbb{N})$

Ejercicio 23. Hallar el cardinal de los siguientes conjuntos:

i) $\{I \ / \ I \text{ es un intervalo de extremos racionales}\}$

ii) $\{[a, b] \ / \ a, b \in \mathbb{R}\}$

iii) I , sabiendo que $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}$ es una familia de intervalos disjuntos

iv) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 3x + 2y \geq 7\}$

v) $\mathbb{R}_{>0}$

Ejercicio 24. Probar que la unión numerable de conjuntos de cardinal c tiene cardinal c.

Ejercicio 25. Sean a, b, c cardinales. Probar que:

i) $a.(b + c) = a.b + a.c$

ii) $a^{b+c} = a^b.\ a^c$

iii) $(a^b)^c = a^{bc}$

iv) $(ab)^c = a^c.\ b^c$

v) Si $b \leq c$, entonces $a^b \leq a^c$ y $b^a \leq c^a$

Ejercicio 26. Probar que $n^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = c^{\aleph_0} = c$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Ejercicio 27. Mostrar que $\mathbb{R}$ es unión disjunta de c conjuntos de cardinal c.

Ejercicio 28. Se consideran los siguientes conjuntos de funciones:

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{F}(\mathbb{R}) & = & \{f \ / \ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\} \\ \mathcal{C}(\mathbb{R}) & = & \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \ / \ f \text{ es continua}\} \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \mathcal{F}(\mathbb{Q}) & = & \{f \ / \ f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}\} \\ \mathcal{C}(\mathbb{Q}) & = & \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{Q}) \ / \ f \text{ es continua}\} \end{array}$$

i) Probar que $\sharp(\mathcal{F}(\mathbb{R})) > c$.

ii) Calcular $\sharp(\mathcal{F}(\mathbb{Q}))$.

iii) Calcular $\sharp(\mathcal{C}(\mathbb{Q}))$.

iv) Probar que la función $\phi : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{Q})$ dada por $\phi(f) = f|_{\mathbb{Q}}$ es inyectiva. ¿Qué significa esto?

v) Calcular $\sharp(\mathcal{C}(\mathbb{R}))$.

Ejercicio 29. Probar que el conjunto de partes numerables de $\mathbb{R}$ (es decir, el subconjunto de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ formado por todos los subconjuntos numerables de $\mathbb{R}$) tiene cardinal c.

C. Axioma de Elección y Lema de Zorn

"El Axioma de Elección es obviamente cierto, el Principio de Buena Ordenación es obviamente falso, y ¿Quién puede decirlo para el Lema de Zorn?"
Jerry Bona

Ejercicio 30. Si X es un conjunto infinito, entonces existe una aplicación inyectiva $f : \mathbb{N} \to X$. Sugerencia: definir f por medio de las fórmulas recursivas $\begin{array}{rcl} f(1) & = & e(X) \\ f(n+1) & = & e(X - \{f(1), ..., f(n)\}) \end{array}$ siendo e una función de elección en las partes no vacías de X.

Ejercicio 31. Probar que una cadena infinita contiene o bien una cadena isomorfa (con el orden) a $\mathbb{N}$ o bien una cadena isomorfa a $\mathbb{Z}_{\leq -1}$.

Ejercicio 32. Sean $A, B \neq \emptyset$. Entonces, o bien existe $f : A \to B$ inyectiva, o bien existe $g : B \to A$ inyectiva.(Es decir $\sharp A \leq \sharp B$ o $\sharp B \leq \sharp A$).

Ejercicio 33. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $S \subseteq V$ un subespacio. Sea $T : S \to \mathbb{R}$ una transformación lineal. Entonces T se puede extender a todo el espacio, i.e. $\exists\ \widetilde{T} : V \to \mathbb{R}$ transformación lineal, tal que $\widetilde{T}|_S \equiv T$.

Ejercicio 34. En un espacio vectorial, todo conjunto linealmente independiente se puede extender a una base.

Ejercicio 35. En un espacio vectorial, de todo sistema de generadores se puede extraer una base.

Ejercicio 36. Probar que existe una aplicación suryectiva $f : X \to Y$ si y sólo si existe $g : Y \to X$ inyectiva. (Esto dice que $\sharp X \geq \sharp Y$si y sólo si $\sharp Y \leq \sharp X$).