Práctica 3: Espácios Métricos

"Não se pode esperar aprender Matemática contemplativamente. Apelo, portanto, ao leitor para que tente resolver os exercícios que lhe pareçam mais atraentes e/ou desafiadores. [...] Procure ler o enunciado de cada um. E boa sorte na viagem que ora inicia."
Elon Lages Lima.

A. $\mathbb{R}^n$ como Espácio Métrico

Ejercicio 1. Probar que toda colección de conjuntos abiertos disjuntos de $\mathbb{R}^n$ es necesariamente numerable. Dar un ejemplo de colección de conjuntos cerrados disjuntos que no sea numerable.

Ejercicio 2. Sea G la colección de todas las bolas $B(q,r)$ de $\mathbb{R}^n$con centro $q \in \mathbb{Q}^n$ y radio racional r. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $x \in S$. Probar que $\exists\ B_k \in G$ tal que $x \in B_k \subseteq S$.

Ejercicio 3. *Teorema de Lindelöf.* Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $C = (W_i)_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de A. Probar que existe un subcubrimiento numerable de C que cubre a A.

Ejercicio 4. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un *punto de condensación* de S si toda n-bola $B(x)$ tiene la propiedad de que $B(x) \cap S$ es no numerable. Probar que si S es no numerable entonces existe un punto $x \in S$ de condensación de S.

Ejercicio 5. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$, probar que la colección de puntos aislados de S es numerable.

Ejercicio 6. Se definen las funciones $d_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq 5)$ por:

$$d_1(x,y) = (x-y)^2 \qquad , \qquad d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|} \qquad , \qquad d_3(x,y) = |x^2 - y^2|$$

$$d_4(x,y) = |x - 2y| \qquad , \qquad d_5(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$

Determinar cuáles de estas funciones son métricas en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 7.

i) Probar que las siguientes funciones son métricas en $\mathbb{R}^n$:

(a) $d_1(x,y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

(b) $d_2(x,y) = \Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\Big)^{1/2}$

(c) $d_\infty(x,y) = \displaystyle\sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$.

(d) $d_\alpha(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^\alpha$ si $0 < \alpha < 1$.

ii) Para $n = 2$, dibujar las tres bolas abiertas $B(0, 1)$ de centro $0 \in \mathbb{R}^2$ y radio 1.

Ejercicio 8. * Sean $p, p' \in \mathbb{R}$, tales que $1 < p, p' < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

i) (Desigualdad de Young) Probar si $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'}$$

ii) (Desigualdad de Hölder) Defiamos para $x \in \mathbb{R}^n$, la norma p por:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

entonces si $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_{p'}$$

Sugerencia: reducirla al caso $\|x\|_p = \|y\|_{p'} = 1$.

iii) (Desigualdad de Minkowski) Si $x, y \in R^n$ entonces:

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Sugerencia: utilizar la desigualdad de Hölder.

iv Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ pongamos $d_p(x, y) = \|x - y\|_p$, probar que es una distancia en $\mathbb{R}^n$.

B. Espácios Métricos, Topologías

"Muchos resultados principales del Análisis no tienen nada que ver con la naturaleza algebraica de los números reales y sólo se apoyan en aquellas propiedadedes de los números que están relacionadas con el concepto de distancia. Así, llegamos al concepto de espacio métrico, uno de los más importantes de la matemática moderna."
Kolmogorov

Ejercicio 9. Sea X un conjunto y $\delta : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Verificar que δ es una métrica y hallar los abiertos de (X, δ).
Nota: δ se llama *métrica discreta* y (X, δ) *espacio métrico discreto.*

Ejercicio 10. Sea $N : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$N(a) = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } a \neq 0, \quad p^n \mid a \quad \text{y} \quad p^{n+1} \nmid a \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

donde p es un primo fijo, y sea $d : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(a,b) = N(a-b)$. Probar que $(\mathbb{Z}, d)$ es un espacio métrico.

Ejercicio 11. Sea $\ell^\infty = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \ / \ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es acotada}\}$. Se considera $d : \ell^\infty \times \ell^\infty \to \mathbb{R}$ definida por $d((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|$. Probar que (ℓ^∞, d) es un espacio métrico.

Ejercicio 12. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, se define $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ es continua }\}$. Probar que son espacios métricos:

i) $(C[a,b], d_1)$, con $d_1(f,g) = \displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$

ii) $(C[a,b], d_\infty)$, con $d_\infty = \displaystyle\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$.

Ejercicio 13. Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) espacios métricos. Consideremos el conjunto $X_1 \times X_2$ y la aplicación $d : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2)$.

i) Probar que d define una métrica en $X_1 \times X_2$.

ii) Construir otras métricas en $X_1 \times X_2$.

Ejercicio 14.

i) Sea (X, d) un espacio métrico. Se define $d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$. Probar que d' es una métrica en X topológicamente equivalente a d (o sea, que ambas dan lugar a una misma noción de conjunto abierto). Observar que $0 \le d'(x,y) < 1$ para todo $x, y \in X$.

ii) Sea $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ vale $0 \le d_n(x,y) \le 1$ para todo par de elementos $x, y \in X_n$. Para cada $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definimos:
$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}$$
Probar que d es una métrica en el espacio producto $X = \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} X_n$.

iii) Sea (X, d) un espacio métrico. Llamamos $X^{\mathbb{N}}$ al conjunto de las sucesiones de X. Mostrar que $X^{\mathbb{N}}$ es un espacio métrico con una distancia conveniente.

Ejercicio 15. Sean d_∞ y d_2 las métricas en $\mathbb{R}^n$ definidas en el Ejercicio 2. Mostrar que un conjunto es abierto para d_∞ si y sólo si lo es para d_2.

Ejercicio 16. *Propiedades topológicas.* Sea (X, d) un espacio métrico y sean $A, B \subseteq X$

i) Probar las siguientes propiedades del *interior* de un conjunto:

(a) $A^\circ \ = \displaystyle\bigcup_{\substack{G \text{ abierto} \\ G \subseteq A}} G$

(b) $\emptyset^\circ = \emptyset$ y $X^\circ = X$

(c) $A \subseteq B \implies A^\circ \subseteq B^\circ$

(d) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$. >Se puede generalizar a una intersección infinita?

(e) $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$. >Vale la igualdad?

ii) Probar las siguientes propiedades de la *clausura* de un conjunto:

(a) $\overline{A} = \displaystyle\bigcap_{\substack{F \text{ cerrado} \\ A \subseteq F}} F$

(b) $\overline{\emptyset} = \emptyset$ y $\overline{X} = X$

(c) $A \subseteq B \implies \overline{A} \subseteq \overline{B}$

(d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. >Se puede generalizar a una unión infinita?

(e) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

(f) $x \in \overline{A} \iff$ Existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \longrightarrow x$

iii) Probar las siguientes propiedades que relacionan interior y clausura:

(a) $(X - A)^\circ = X - \overline{A}$

(b) $\overline{X - A} = X - A^\circ$

>Son ciertas las igualdades: $\overline{A} = \overline{A^\circ}$, $A^\circ = (\overline{A})^\circ$?

iv) Probar las siguientes propiedades de la *frontera* de un conjunto:

(a) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X - A}$

(b) ∂A es cerrado

(c) $\partial A = \partial(X - A)$

Ejercicio 17. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $G \subseteq X$ abierto y $F \subseteq X$ cerrado. Probar que $F - G$ es cerrado y $G - F$ es abierto.

Ejercicio 18. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $a \in X$ y $r \in \mathbb{R}_{>0}$, llamamos *bola cerrada de centro a y radio r* al conjunto $\overline{B}(a, r) = \{x \in X \ / \ d(x, a) \leq r\}$.

i) Probar que $\overline{B}(a, r)$ es un conjunto cerrado y que $\overline{B(a, r)} \subseteq \overline{B}(a, r)$.

ii) Dar un ejemplo de un espacio métrico y una bola abierta $B(a, r)$ cuya clausura no sea $\overline{B}(a, r)$.

Ejercicio 19. Sean (X, d_1) e (Y, d_2) espacios métricos. Se considera el espacio métrico $(X \times Y, d)$, donde d es la métrica definida en el Ejercicio 6. Probar que para $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ valen:

i) $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$

ii) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$

Ejercicio 20. Sea (X, d) un espacio métrico y sean A, B subconjuntos de X.

i) Probar las siguientes propiedades del *derivado* de un conjunto:

(a) A' es cerrado

(b) $A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad A' \subseteq B'$

(c) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

(d) $\overline{A} = A \cup A'$

(e) $(\overline{A})' = A'$

ii) Probar que $x \in X$ es un punto de acumulación de $A \subseteq X$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \longrightarrow x$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es casi constante.

Ejercicio 21. Hallar interior, clausura, conjunto derivado y frontera de cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$. Determinar cuáles son abiertos o cerrados.

$$[0,1] \quad ; \quad (0,1) \quad ; \quad \mathbb{Q} \quad ; \quad \mathbb{Q}\cap[0,1] \quad ; \quad \mathbb{Z} \quad ; \quad [0,1)\cup\{2\}$$

Ejercicio 22. Caracterizar los abiertos y los cerrados de $\mathbb{Z}$ considerado como espacio métrico con la métrica inducida por la usual de $\mathbb{R}$. Generalizar a un subespacio discreto de un espacio métrico X.

Ejercicio 23. Sea (X,d) un espacio métrico y sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en X.

i) Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, probar que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = d(x,y)$.

ii) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones de Cauchy en X, probar que la sucesión real $(d(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Distancias a conjuntos:

Ejercicio 24. Sea (X,d) un espacio métrico. Dados $A \subseteq X$ no vacío y $x \in X$, se define la *distancia de x a A* como $d_A(x) = \inf\{d(x,a) \ / \ a \in A\}$. Probar:

i) $\big|d_A(x) - d_A(y)\big| \le d(x,y)$ para todo par de elementos $x,y \in X$

ii) $x \in A \quad \Longrightarrow \quad d_A(x) = 0$

iii) $d_A(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \overline{A}$

iv) $B_A(r) = \{x \in X \ / \ d_A(x) < r\}$ es abierto para todo $r > 0$

v) $\overline{B}_A(r) = \{x \in X \ / \ d_A(x) \le r\}$ es cerrado para todo $r > 0$

Ejercicio 25. Un subconjunto A de un espacio métrico X se dice un G_δ (resp. un F_σ) si es intersección de una sucesión de abiertos (resp. unión de una sucesión de cerrados) de X.

i) Probar que el complemento de un G_δ es un F_σ.

ii) Probar que el complemento de un F_σ es un G_δ.

ii) Probar que todo cerrado es un G_δ. Deducir que todo abierto es un F_σ.

iv) (a) Exhibir una sucesión de abiertos de $\mathbb{R}$ cuya intersección sea $[0,1)$. Idem con $[0,1]$.

(b) Exhibir una sucesión de cerrados de $\mathbb{R}$ cuya unión sea $[0,1)$.

¿Qué conclusión saca de estos ejemplos?

Ejercicio 26. Sea (X,d) un espacio métrico. Dados $A,B \subseteq X$ no vacíos se define la *distancia entre A y B* por $d(A,B) = \inf\{d(a,b) \ / \ a \in A \ , \ b \in B\}$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

i) $d(A,B) = d(\overline{A},B)$

ii) $d(A,B) = 0 \iff A \cap B \neq \emptyset$

iii) $d(A,B) = 0 \iff \overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$

iv) $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$