Práctica 4: Continuidad, Separabilidad, Completitud

"Calculus required continuity, and continuity was supposed to require the infinitely little; but nobody could discover what the infinitely little might be."
Bertrand Russell

A. Continuidad

Ejercicio 1. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y sea $f : X \longrightarrow Y$. Probar que:

i) f es continua en $x_0 \in X$ si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \longrightarrow x_0$, la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ converge a $f(x_0)$.

ii) Son equivalentes:

(a) f es continua
(b) Para todo $G \subset Y$ abierto, $f^{-1}(G)$ es abierto en X
(c) Para todo $F \subset Y$ cerrado, $f^{-1}(F)$ es cerrado en X

Ejercicio 2. Decidir cuáles de las siguientes funciones son continuas:

i) $f : (\mathbb{R}^2, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\ |)$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, donde d representa la métrica euclídea.

ii) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, \delta) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, d_\infty)$, la función identidad, donde δ representa la métrica discreta.

iii) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, d_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \delta)$, la función identidad, donde δ representa la métrica discreta.

iv) $i : (E, d) \longrightarrow (X, d)$, la inclusión, donde $E \subset X$

Ejercicio 3. Sean $f, g, h : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases} \qquad g(x) = x.f(x) \qquad h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{m}{n} \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases},\ (m : n) = 1$$

Probar que:

i) f es discontinua en todo punto

ii) g sólo es continua en $x = 0$

iii) h es continua en $[0, 1] - \mathbb{Q}$

Ejercicio 4. Probar que un espacio métrico X es discreto si y sólo si toda función de X en un espacio métrico arbitrario es continua.

Ejercicio 5. *Métricas topológicamente equivalentes:*

1. Supongamos que existen constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que $d_1(x,y) \leq c_1\, d_2(x,y) \leq c_2\, d_1(x,y)$ para todo $x, y \in X$. Probar que d_1 y d_2 son topológicamente equivalentes.

2. Probar que d_1 y d_2 son topológicamente equivalentes si y sólo si la función identidad $id_X : (X, d_1) \longrightarrow (X, d_2)$ es homeomorfismo.

3. Probar que en $\mathbb{R}^n$ todas las métricas d_p con $1 \leq p \leq \infty$ son topológicamente equivalentes.

4. Consideramos en $\mathbb{R}$ la métrica
$$d'(x,y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|$$
Probar que es topológicamente equivalente a la métrica usual $d(x,y) = |x-y|$, pero que $\mathbb{R}$ no es completo con la métrica d'.

Ejercicio 6. Considerando en cada $\mathbb{R}^n$ la métrica euclídea, probar que:

i) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2 + y \operatorname{sen}(e^x - 1) = -2\}$ es cerrado.

ii) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; -1 \leq x^3 - 3y^4 + z - 2 \leq 3\}$ es cerrado.

iii) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \;/\; 3 < x_1 - x_2\}$ es abierto.

Mencione otras dos métricas para las cuales siguen valiendo estas afirmaciones.

Ejercicio 7. * Consideramos las funciones $E, I : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ definidas por:
$$E(f) = f(0) \text{ y } I(f) = \textstyle\int_0^1 f(x)\, dx$$

1. Demostrar que si utilizamos en $C([0,1])$, la distancia d_∞ ambas resultan continuas.

2. Demostrar que si, en cambio, utilizamos en $C([0,1])$ la distancia d_1, I es una función continua pero E no lo es.

3. Analizar si es posible que una función $F : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ sea continua para la distancia d_1 pero no para d_∞ ?

Ejercicio 8. Sean X, Y espacios métricos y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Probar que el gráfico de f, definido por
$$G(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$$
es cerrado en $X \times Y$. >Es cierta la afirmación recíproca?

Ejercicio 9. Sea $f : (X,d) \longrightarrow (Y,d')$ una función. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

i) Si $X = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, con cada U_i abierto y $f|_{U_i}$ continua para todo $i \in I$, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua.

ii) Si $X = \bigcup\limits_{i\in I} F_i$, con cada F_i cerrado y $f|_{F_i}$ continua para todo $i \in I$, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua.

iii) Si $X = \bigcup\limits_{i=1}^{m} F_i$, con cada F_i cerrado y $f|_{F_i}$ continua para cada $i = 1, \ldots, m$, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua.

iv) Si $X = \bigcup\limits_{i=1}^{m} X_i$ y $f|_{X_i}$ continua para cada $i = 1, \ldots, m$, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua.

Ejercicio 10. Sea (X,d) un espacio métrico y sea $f : X \to \mathbb{R}$. Probar que f es continua si y sólo si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, los conjuntos $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ y $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ son abiertos.

Ejercicio 11. Sea (X,d) un espacio métrico y sea A un subconjunto de X. Probar que la función $d_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_A(x) = d(x,A) = \inf\limits_{a\in A} d(x,a)$ es (uniformemente) continua.

Ejercicio 12. *Teorema de Urysohn.*
Sea (X,d) un espacio métrico y sean A, B cerrados disjuntos de X.

i) Probar que existe una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que:

$$f|_A \equiv 0 \qquad , \qquad f|_B \equiv 1 \qquad \text{y} \qquad 0 \le f(x) \le 1 \quad \forall\, x \in X$$

Sugerencia: Considerar la función $f(x) = \frac{d_A(x)}{d_A(x)+d_B(x)}$.

ii) Deducir que existen abiertos $U, V \subset X$ disjuntos tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

Ejercicio 13. Sea $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ una función.

i) Probar que f es continua. >Sigue valiendo si f toma valores irracionales?

ii) Suponiendo que f es biyectiva, >puede ser un homeomorfismo?

Ejercicio 14. Sea (X,d) un espacio métrico, y sea $\Delta : X \longrightarrow X \times X$ la aplicación diagonal definida por $\Delta(x) = (x,x)$. Probar que:

i) Δ es un homeomorfismo entre X y $\{(x,x) : x \in X\} \subset X \times X$.

ii) $\Delta(X)$ es cerrado en $X \times X$.

Ejercicio 15. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ se dice *abierta* si $f(A)$ es abierto para todo abierto $A \subset X$ y se dice *cerrada* si $f(F)$ es cerrado para todo cerrado $F \subset X$.

i) Probar que si f es biyectiva entonces, f es abierta (cerrada) si y sólo si f^{-1} es continua.

ii) Dar un ejemplo de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ continua que no sea abierta.

iii) Dar un ejemplo de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ continua que no sea cerrada.

iv) Mostrar con un ejemplo que una función puede ser biyectiva, abierta y cerrada pero no continua.

Ejercicio 16. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función.

i) Probar que f es continua si y sólo $f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$ para todo subconjunto $E \subset X$.

Mostrar con un ejemplo que la inclusión puede ser estricta.

ii) Probar que f es continua y cerrada si y sólo si $f(\overline{E}) = \overline{f(E)}$ para todo subconjunto $E \subset X$.

Ejercicio 17.

i) Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y sea $D \subset X$ denso. Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ funciones continuas. Probar que si $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$.

ii) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{Q}$. Probar que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \alpha\, x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 18. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Consideramos en $X \times Y$ la métrica d_∞.

i) Probar que las proyecciones $\pi_1 : X \times Y \longrightarrow X$ y $\pi_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ son continuas y abiertas.

Mostrar con un ejemplo que pueden no ser cerradas.

ii) Sea (Z, δ) un espacio métrico y sea $f : Z \longrightarrow X \times Y$ una aplicación. Probar que f es continua si y sólo si $f_1 = \pi_1 \circ f$ y $f_2 = \pi_2 \circ f$ lo son.

Ejercicio 19. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es *semicontinua inferiormente* (resp. *superiormente*) en $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, x_0) < \delta \Longrightarrow f(x_0) < f(x) + \varepsilon \qquad (\text{resp. } f(x_0) + \varepsilon > f(x))$$

Probar que:

i) f es continua en x_0 si y sólo si f es semicontinua inferiormente y superiormente en x_0.

ii) f es semicontinua inferiormente si y sólo si $f^{-1}(\alpha, +\infty)$ es abierto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

iii) f es semicontinua superiormente si y sólo si $f^{-1}(-\infty, \alpha)$ es abierto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

B. Separabilidad

Ejercicio 20. Probar que $\mathbb{R}^n$ (con la distancia euclídea) es separable.

Ejercicio 21. Sea $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \ / \ \exists\, n_0 : a_n = 0 \ \forall\, n \geq n_0\}$. Se considera la aplicación $d_\infty : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \times \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_\infty((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|$. Probar que $(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, d_\infty)$ es un espacio métrico separable.

Ejercicio 22. Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que una familia $\mathcal{A} = (U_j)_{j\in J}$ de abiertos de X es una *base de abiertos de* X si todo abierto de X se puede escribir como unión de miembros de $\mathcal{A}$. Probar que $\mathcal{A}$ es una base de abiertos de X si y sólo si verifica la siguiente condición: “Para todo abierto G de X y para todo $x \in G$ existe $j \in J$ tal que $x \in U_j \subseteq G$”.

Ejercicio 23. Sea (X, d) un espacio métrico, que verifica que cada cubrimiento abierto de X tiene un subcubrimiento numerable. Probar que X es separable.

Ejercicio 24. Probar que todo subespacio de un espacio métrico separable es separable.

Ejercicio 25. Sea (X, d) un espacio métrico separable. Probar que toda familia de subconjuntos de X no vacíos, abiertos y disjuntos dos a dos es a lo sumo numerable. Deducir que el conjunto de puntos aislados de X es a lo sumo numerable.

Ejercicio 26. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Consideramos en $X \times Y$ la métrica d_∞ definida por

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\}.$$

Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es separable si y sólo si (X, d) e (Y, d') son separables.

Ejercicio 27. * Probar que (ℓ^p, d_p) es separable cuando $1 \leq p < \infty$. (Sugerencia: Probar que $\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})} = \{(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q} \ / \ \exists\, n_0 : q_n = 0 \ \forall\, n \geq n_0\}$ es denso en ℓ^p)

Ejercicio 28. * ¿Es el espacio (ℓ^∞, d_∞) separable?.

C. Completitud

Ejercicio 29. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. Probar:

i) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ si y sólo si para toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$

ii) Si existe $x \in X$ para el cual toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(x_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{j\to\infty} x_{n_{k_j}} = x$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

iii) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. >Vale la recíproca?

iv) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, entonces es acotada.

v) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y tiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in X$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

Ejercicio 30. Probar que si toda bola cerrada de un espacio métrico X es un subespacio completo de X, entonces X es completo.

Ejercicio 31. Sea (X, d) un espacio métrico.

i) Probar que todo subespacio completo de (X, d) es un subconjunto cerrado de X.

ii) Probar que si X es completo, entonces todo subconjunto $F \subseteq X$ cerrado, es un subespacio completo de X.

Ejercicio 32. *Teorema de Cantor.*
Probar que un espacio métrico (X, d) es completo si y sólo si toda familia $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de X cerrados, no vacíos tales que $F_{n+1} \subset F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\operatorname{diam}(F_n) \longrightarrow 0$ tiene un único punto en la intersección.

Ejercicio 33. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es completo si y sólo si (X, d) e (Y, d') son completos.

Ejercicio 34.

i) Sea X un espacio métrico y sea $B(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ es acotada } \}$. Probar que $(B(X), d_\infty)$ es un espacio métrico completo, donde $d_\infty(f, g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$.

ii) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Probar que $(C[a, b], d_\infty)$ es un espacio métrico completo, donde $d_\infty(f, g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$.

Ejercicio 35. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\mathcal{D} \subset X$ un subconjunto denso con la propiedad que toda sucesión de Cauchy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ converge en X. Probar que X es completo.

Ejercicio 36. Sean X, Y espacios métricos. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suryectiva.

i) Probar que si X es separable, entonces Y es separable.

ii) ¿Es cierto que si X es completo, entonces Y es completo?

D. Continuidad Uniforme

Ejercicio 37. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función que satisface:

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq c\ d(x_1, x_2)$$

para todo $x_1, x_2 \in X$, donde $c \geq 0$. Probar que f es uniformemente continua.

Ejercicio 38.

i) Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos, $A \subseteq X$ y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que si existen $\alpha > 0$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ sucesiones y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

   (a) $d(x_n, y_n) \longrightarrow 0$ para $n \to \infty$

   (b) $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \alpha$ para todo $n \geq n_0$

   entonces f no es uniformemente continua en A.

ii) Verificar que la función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. >Y en $\mathbb{R}_{\leq -\pi}$?

iii) Verificar que la función $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ no es uniformemente continua en $(0, 1)$.

Ejercicio 39.

i) Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ una función uniformemente continua y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Probar que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y.

ii) Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ un homeomorfismo uniforme. Probar que (X, d) es completo si y sólo si (Y, d') es completo.

   En particular, si un espacio métrico X es completo para una métrica lo es para cualquier otra métrica uniformemente equivalente.

Ejercicio 40.

i) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada y continua pero no uniformemente continua.

ii) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ no acotada y uniformemente continua.

Ejercicio 41. Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ una función uniformemente continua, y sean $A, B \subset X$ conjuntos no vacíos tales que $d(A, B) = 0$. Probar que $d'(f(A), f(B)) = 0$.

Ejercicio 42. Sean X e Y espacios métricos, Y completo. Sea $D \subset X$ denso y sea $f : D \longrightarrow Y$ una función uniformemente continua. Probar que f tiene una única extensión continua a todo X, es decir, existe una única función $F : X \longrightarrow Y$ continua tal que $F|_D = f$. (Más aún, F es uniformemente continua).

E. Conjuntos Perfectos

Ejercicio 43. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor.

1. Probar que $\mathcal{C}$ es cerrado y acotado (luego compacto).
2. Probar que $\mathcal{C}$ es perfecto (i.e. $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$).
3. Probar que $\mathcal{C}$ tiene interior vacío.
4. Probar que $x \in \mathcal{C}$ si y sólo si su desarrollo en base 3 tiene sólo las cifras 0 y 2.
5. Probar que $\mathcal{C}$ tiene la potencia del continuo.

Ejercicio 44. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Probar que si $P \subseteq X$es perfecto entonces es no numerable.

Ejercicio 45.

1. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ y no numerable. Sea T el conjunto de puntos de condensación de S (que por el ejercicio 4 de la práctica 3 es no vacío). Probar que:
   (a) $S - T$ es numerable.
   (b) $S \cap T$ es no numerable.
   (c) T es un conjunto cerrado.
   (d) T no posee puntos aislados.
2. *Teorema de Cantor-Bendixon.* Probar que si F es un conjunto cerrado no numerable de $\mathbb{R}^n$ puede expresarse en la forma $F = A \cup B$, donde A es perfecto y B es numerable.