Práctica 5: Compacidad, Baire, Conexión

Compacidad

Ejercicio 1.

i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Probar que el conjunto $\{0\} \cup \{a_n \ / \ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ es compacto.

ii) Mostrar que el intervalo $(0,1] \subset \mathbb{R}$ no es compacto.

iii) Sea $S = (a,b) \cap \mathbb{Q}$ con $a,b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Probar que S es un subconjunto cerrado y acotado pero no compacto de $(\mathbb{Q}, d)$, donde d es la métrica euclídea de $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2. Probar que todo espacio métrico compacto es separable.

Ejercicio 3. Sea $A = \{a^{(n)} \in \ell^\infty \ / \ n \in \mathbb{N}\}$, donde cada sucesión $a^{(n)} = (a_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ está definida por

$$a_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq n \\ 1 & \text{si} \quad k = n \end{cases}$$

Probar que A es discreto, cerrado y acotado, pero no compacto.

Ejercicio 4. Dado un cubrimiento por abiertos $(U_i)_{i\in I}$ de un espacio métrico (X,d), un número $\varepsilon > 0$ se llama *número de Lebesgue* de $(U_i)_{i\in I}$ si para todo $x \in X$ existe $j \in I$ tal que $B(x,\varepsilon) \subset U_j$. Probar que todo cubrimiento por abiertos de un espacio métrico compacto tiene un número de Lebesgue.

Ejercicio 5. Sea (X,d) un espacio métrico. Se dice que una familia $(F_i)_{i\in I}$ de subconjuntos de X tiene la *propiedad de intersección finita* (P.I.F.) si cualquier subfamilia finita de $(F_i)_{i\in I}$ tiene intersección no vacía.
Probar que los siguientes enunciados son equivalentes:

i) X es compacto.

ii) Toda familia $(F_i)_{i\in I}$ de subconjuntos cerrados de X con la P.I.F. tiene intersección no vacía.

iii) Todo subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación en X.

iv) X es secuencialmente compacto (es decir, toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente).

v) X es completo y totalmente acotado.

Ejercicio 6. Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que:

i) Toda unión finita y toda intersección (finita o infinita) de subconjuntos compactos de X es compacta.

ii) Si (X, d) es compacto, todo subconjunto cerrado de X es compacto.

iii) Un subconjunto $F \subset X$ es cerrado si y sólo si $F \cap K$ es cerrado para todo compacto $K \subset X$.

Ejercicio 7. Sea $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \ / \ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\}$. Se define en c_0 la métrica

$$d(x, y) = \sup\{|x_n - y_n| \ / \ n \in \mathbb{N}\}$$

i) Demostrar que la bola cerrada $\overline{B}(x, 1) = \{y \in C_0 \ / \ d(x, y) \leq 1\}$ no es compacta.

ii) Probar que (c_0, d) es separable.

Ejercicio 8. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Se considera $(X \times Y, d_\infty)$, donde

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\}$$

Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es compacto si y sólo si (X, d) e (Y, d') son compactos.

Ejercicio 9. Sea (X, d) un espacio métrico.

i) Sean $K \subset X$ un compacto y sea $x \in X - K$. Probar que existe $y \in K$ tal que $d(x, K) = d(x, y)$; es decir, la distancia entre x y K 'se realiza'.

ii) Sean F, $K \subset X$ dos subconjuntos disjuntos de X tales que F es cerrado y K es compacto. Probar que la distancia $d(F, K)$ entre F y K es positiva.

iii) Sean $K_1, K_2 \subset X$ dos subconjuntos compactos de X tales que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Probar que existen $x_1 \in K_1$ y $x_2 \in K_2$ tales que $d(K_1, K_2) = d(x_1, x_2)$; es decir, la distancia entre K_1 y K_2 'se realiza'.

Ejercicio 10. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Se define

$$\mathcal{K}(X) = \{K \subset X \ / \ K \text{ es compacto y no vacío}\}$$

i) Sea $\tilde{d}(A, B) = \sup\limits_{a\in A}\{d(a, B)\}$. Verificar que $\tilde{d}$ no es una métrica en $\mathcal{K}(X)$.

ii) Se define $\delta : \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \to \mathbb{R}$ como $\delta(A, B) = \max\{\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)\}$. Probar que para todo $\varepsilon > 0$ vale

$$\delta(A, B) < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \subset B(B, \varepsilon) \quad \text{y} \quad B \subset B(A, \varepsilon)$$

donde $B(C, \varepsilon) = \{x \in X \ / \ d(x, C) < \varepsilon\}$ para cada $C \subset X$.

iii) Probar que δ es una métrica en $\mathcal{K}(X)$.

Ejercicio 11. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ continua y biyectiva. Probar que si (X, d) es compacto, entonces f es un homeomorfismo.

Ejercicio 12. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Probar que para cada espacio métrico (Y, d'), la proyección $\pi : X \times Y \to Y$ definida por $\pi(x, y) = y$ es cerrada.

Ejercicio 13. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos, y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que si Y es compacto y el gráfico de f es cerrado en $X \times Y$, entonces f es continua.

Ejercicio 14.

i) Sea $f : \mathbb{R}_{\geq a} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que es uniformemente continua en $[a, b]$ y también en $[b, +\infty)$. Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geq a}$.

ii) Deducir que $\sqrt{x}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

iii) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 15. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subset X$ compacto. Probar que si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y $f(x) > 0$ para todo $x \in A$, entonces existe $K > 0$ tal que $f(x) \geq K$ para todo $x \in A$.

Ejercicio 16. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y abierta.

i) Probar que f no tiene extremos locales; es decir, no existen $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $f(x_0) \leq f(x)$ (resp. $f(x_0) \geq f(x)$) para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

ii) Comprobar que existen $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tales que $f(\mathbb{R}) = (a, b)$.

iii) Mostrar que $f : \mathbb{R} \longrightarrow (a, b)$ es un homeomorfismo y que ella y su inversa son funciones monótonas.

Ejercicio 17. Sea (X, d) un espacio métrico compacto y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función semicontinua superiormente. Probar que f está acotada superiormente en X y que f alcanza máximo en X.

Ejercicio 18. Sea $D \subset X$ un subconjunto denso, y sea $f : D \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. Probar que f tiene una única extensión a todo X.¿ Puede $\mathbb{R}$ reemplazarse por $\mathbb{R}^k$? ¿ Por cualquier espacio métrico compacto? ¿ Por cualquier espacio completo? ¿ Por cualquier espacio métrico?

Baire

Ejercicio 19. Probar que $\mathbb{R}^n$ no puede escribirse como unión numerable de subespacios vectoriales propios.

Ejercicio 20. Sean (X, d) un espacio métrico completo sin puntos aislados y sea D un subconjunto denso y numerable de X. Probar que D no es un G_δ.

Ejercicio 21. Demostrar que no existe ninguna función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que sea continua sólo en los racionales.
Sugerencia: Para cada $n \in \mathbb{N}$ considerar

$$U_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ \exists U \subseteq \mathbb{R} \text{ abierto con } x \in U \text{ y } \operatorname{diam}(f(U)) < \frac{1}{n} \right\}$$

Ejercicio 22. Sea $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de intervalos de $[0, 1]$ con extremos racionales y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$E_n = \{ f \in C[0, 1] \ / \ f \text{ es monótona en } I_n \}.$$

i) Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, E_n es cerrado y nunca denso en $(C[0, 1], d_\infty)$.

ii) Deducir que existen funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$ que no son monótonas en ningún subintervalo.

Conexión

Ejercicio 23. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son conexos:

$\{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 < |x| < 2\}$, $\mathbb{N}$, $[0, 1)$, $\mathbb{Q}$, $\{\frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}\}$

$B(a, \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ en un espacio métrico (X, d).

Ejercicio 24.

i) Dar ejemplos de conjuntos conexos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ tales que $A \cup B$ no sea conexo. Idem para $A \cap B$ y $A - B$.

ii) Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ conexo y sea x un punto de acumulación de C. Probar que $C \cup \{x\}$ es conexo.

iii) Determinar la validez de las siguientes afirmaciones:

(a) Si C es conexo, entonces C° es conexo.

(b) Si C es conexo, entonces $\overline{C}$ es conexo.

Ejercicio 25. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $C \subset X$. Probar que son equivalentes:

i) No existen U, V abiertos en C, no vacíos y disjuntos tales que $C = U \cup V$

ii) No existen $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ abiertos en X y disjuntos, de modo que $C \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, $C \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ y $C \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$

iii) Si $A \subset C$ es no vacío y abierto y cerrado en C, entonces $A = C$

Ejercicio 26. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos conexos de X tal que para cada par de conjuntos $A, B \in \mathcal{A}$ existen $A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ que satisfacen $A_0 = A$, $A_n = B$ y $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ para cada $i = 0, \ldots, n-1$. Probar que $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{A}} A$ es conexo.

Ejercicio 27. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ continua. Probar que f es constante.

Ejercicio 28. Probar que un espacio métrico (X, d) es conexo si y sólo si toda función continua $f : X \longrightarrow \{0, 1\}$ es constante.

Ejercicio 29. Probar que si $n \geq 2$ no existe un homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 30.

i) Probar que si $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ es continua y suryectiva, existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

ii) Sea (X, d) un espacio métrico conexo y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Sean $a, b \in f(X)$ tales que $a \leq b$. Probar que para todo $c \in [a, b]$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = c$. >Vale la recíproca?

iii) Probar que si (X, d) es conexo, entonces $\sharp X = 1$ o $\sharp X \geq c$.

Ejercicio 31. Hallar las componentes conexas de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ y de $\mathbb{R}^2$

i)arcsen$([\frac{\sqrt{2}}{2}, 1])$	iii)$B((-1, 0), 1) \cup B((1, 0), 1)$
ii)$\mathbb{Q}$	iv)$B((-1, 0), 1) \cup B((1, 0), 1) \cup \{(0, 0)\}$

Ejercicio 32. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]$, y sea $X = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \cup \{(0, 0), (0, 1)\}$. Probar que:

i) $\{(0, 0)\}$ y $\{(0, 1)\}$ son componentes conexas de X

ii) Si $B \subset X$ es abierto y cerrado en X, entonces $\{(0, 0), (0, 1)\} \subset B$ o $\{(0, 0), (0, 1)\} \cap B = \emptyset$.

Ejercicio 33. Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que las componentes conexas de X son conjuntos cerrados.

Ejercicio 34. Probar que los siguientes conjuntos son totalmente disconexos:

i) Un espacio métrico discreto con cardinal mayor o igual que 2

ii) $\mathbb{Q}$

iii) El conjunto de Cantor

Arco-Concexión

Ejercicio 35. Sea (X, d) un espacio métrico. Un conjunto $A \subset X$ se dice *arcoconexo* (o *conexo por arcos*) si para todo par de puntos $a, b \in A$ existe una función continua $f : [0, 1] \to X$ tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$.

i) Probar que todo conjunto arcoconexo es conexo.

ii) Exhibir un ejemplo de un conjunto conexo que no sea arcoconexo.

Ejercicio 36. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son arcoconexos:

i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = f(x, y)\}$ donde $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua.

ii) $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n - B(0, 1)$

iii) $\mathbb{R}^2 - \{(x, 0) \ / \ x \in \mathbb{R}\}$

iv) $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

Ejercicio 37. Sean (X, d) un espacio métrico arcoconexo, (Y, d') un espacio métrico y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Probar que el conjunto $f(X)$ es arcoconexo.

Ejercicio 38. Un espacio métrico (X, d) se dice *localmente conexo* (resp. *localmente arcoconexo*) si para todo $x \in X$ y para todo $U \subset X$ entorno de x, existe un entorno conexo (resp. arcoconexo) V de x tal que $x \in V \subset U$. Probar que:

i) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, entonces A es conexo $\iff$ A es arcoconexo

ii) Un espacio métrico es localmente conexo si y sólo si las componentes conexas de los abiertos son abiertas.

iii) Todo espacio métrico conexo y localmente arcoconexo es arcoconexo.

iv) En un espacio métrico localmente arcoconexo todo conjunto abierto y conexo es arcoconexo.

v) Las componentes arcoconexas de un espacio localmente arcoconexo son abiertas.

Ejercicio 39. En el espacio $(C[0, 1], d_\infty)$ se considera el conjunto

$$U = \{f \in C[0, 1] : f(x) \neq 0 \ \forall \ x \in [0, 1]\}$$

Probar que U es abierto y hallar sus componentes conexas.