

PRÁCTICA 6: ESPACIOS NORMADOS

Ejercicio 1. De los espacios métricos vistos hasta ahora, ¿cuáles son normados? ¿Y de Banach?

Ejercicio 2. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Probar que se verifican:

1. Las operaciones $+: E \times E \rightarrow E$ y $\cdot: \mathbb{R}(\text{o}\mathbb{C}) \times E \rightarrow E$ son continuas.
2. $\overline{B_r(x)} = \overline{B_r(x)}$ (la clausura de la bola abierta es la bola cerrada).
3. $\text{diam}(B_r(x)) = 2r$.

Ejercicio 3. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $C \subset E$. Decimos que C es *convexo* si $\forall x, y \in C$ y $\forall t \in [0, 1]$ se tiene que $tx + (1-t)y \in C$.

1. Probar que $B_r(x)$ es convexo.
2. Probar que si $(C_i)_{i \in I}$ son convexos, entonces $\bigcap_{i \in I} C_i$ lo es.
3. Probar que si C es convexo, entonces C° lo es.
4. Probar que si C es convexo, entonces \overline{C} lo es.

Ejercicio 4. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $S \subset E$ un subespacio (vectorial). Probar que:

1. \overline{S} también es un subespacio.
2. Si $S \neq E$, entonces $S^\circ = \emptyset$.
3. Si $\dim(S) < \infty$, entonces S es cerrado
4. Si S es un hiperplano (o sea: $\exists x \neq 0 \in E$ tal que $S \oplus \langle x \rangle = E$), entonces S es o bien denso o bien cerrado en E .

Ejercicio 5. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $(x_n) \subset E$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

Ejercicio 6. Para cada uno de los siguientes ejemplos de subespacios decidir si son cerrados, si son densos y si son hiperplanos.

1. $c = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n\} \subset l^\infty$
2. $c_0 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \rightarrow 0\} \subset c$
3. $\{x \in l^1 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\} \subset l^1$
4. $\{x \in l^2 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\} \subset l^2$
5. $\mathbb{R}[X]$ (polinomios en una variable) $\subset C[0, 1]$

6. $C^1[a, b] \subset C[a, b]$

Ejercicio 7. Sean E y F espacios normados. Sea $T : E \rightarrow F$ un operador lineal. Probar que son equivalentes:

1. T es continuo en 0.
2. $\exists x_0 \in E$ tal que T es continuo en x_0 .
3. T es continuo.
4. T es uniformemente continuo.
5. $\exists M > 0 / \forall x \in E : \|Tx\| \leq M\|x\|$. (T es acotada)
6. $\forall A \subset E$ acotado, $T(A)$ es acotado.

Ejercicio 8. Sean $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ espacios normados. Consideramos $L(E, F) = \{T : E \rightarrow F / T \text{ es lineal y continua}\}$, y para cada $T \in L(E, F)$ sea

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F$$

Probar que:

1. $(L(E, F), \|\cdot\|)$ es un espacio normado.
2. Si F es de Banach entonces $L(E, F)$ también lo es.

Ejercicio 9. Sean E y F espacios normados y sea $T : E \rightarrow F$ un operador lineal y continuo. Verificar las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \\ &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \inf\{M / \|Tx\| \leq M\|x\|\} \end{aligned}$$

Ejercicio 10. Sea $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y sea $K : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ dada por

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x, y)f(y)dy$$

Probar que K es lineal y continua. Acotar su norma.

Ejercicio 11. En $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{(a_n)_{n \geq 1} / \exists n_0, a_n = 0 \forall n \geq n_0\}$ ponemos la norma infinito. Probar que la función $f : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f((a_n)_{n \geq 1}) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n$$

es lineal pero no continua.

Ejercicio 12.

1. Sea $\phi \in C[0, 1]$ y sea $T_\phi : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$T_\phi f = \int_0^1 f(x)\phi(x)dx$$

Probar que T_ϕ es un funcional lineal continuo y que $\|T_\phi\| = \int_0^1 |\phi(x)|dx$

2. Sea $T : c \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Probar que T es lineal, continuo y hallar $\|T\|$.
3. Sea $1 \leq p \leq \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$ el conjugado de p y sea $b \in l^{p'}$. Definimos $T_b : l^p \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue

$$T_b(a) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n$$

Probar que T_b es lineal, continuo y hallar $\|T_b\|$.

Ejercicio 13. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado de dimensión n y sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ un isomorfismo algebraico. Consideramos en \mathbb{R}^n la norma $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

1. Probar que $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty = 1\}$ es compacto en \mathbb{R}^n
2. Probar que existen $c_1, c_2 > 0$ tales que para todo $x \in \mathbb{R}^n : c_1 \|x\|_\infty \leq \|f(x)\|_E \leq c_2 \|x\|_\infty$
3. Deducir que si N_1, N_2 son dos normas en \mathbb{R}^n , entonces existen constantes $a, b > 0$ tales que para todo $x \in \mathbb{R}^n : aN_1(x) \leq N_2(x) \leq bN_1(x)$ (esto es: son equivalentes)

Ejercicio 14. Sean E un espacio de Banach y S, T subespacios cerrados, con $\dim T < \infty$. Probar que $S + T$ es cerrado.

Ejercicio 15. (Lema de Riesz) Sean E un espacio normado, $S \subset E$ un subespacio vectorial cerrado propio, y $0 < \alpha < 1$. Probar que existe $x_\alpha \in E - S$ tal que $\|x_\alpha\| = 1$ y $\|s - x_\alpha\| > \alpha \forall s \in S$. Sug: Considerar $x \notin S$, $r = d(x, S)$ y $x_\alpha = \frac{(x-b)}{\|x-b\|}$ con $b \in S$ adecuado.

Ejercicio 16. Sean E un espacio normado de dimensión infinita. Probar que existe $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ tal que $\|\omega_n\| = 1$ y $d(\omega_n, \omega_m) > 1/2$, $n \neq m$. Deducir que $\overline{B_1(0)}$ no es compacta. (Sugerencia: aplicar el lema de Riesz a una sucesión creciente de subespacios de dimensión finita)

Ejercicio 17. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $H \subset E$ un subespacio. Probar que H es un hiperplano si y sólo si existe $\gamma : E \rightarrow \mathbb{R}(\text{o } \mathbb{C})$ lineal, $\gamma \neq 0$ tal que $H = \text{Nu}(\gamma)$. Probar que H es cerrado si y sólo si γ es continua.

Ejercicio 18. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. Probar que no puede tener una base algebraica numerable. (Sugerencia: sino se escribiría como unión numerable de subespacios de dimensión finita. Usar el teorema de Baire.)