Práctica 8: Series - Convergencia Uniforme - Espacios de Funciones

Ejercicio 1.

i) En cada uno de los casos siguientes, hallar el límite puntual de la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida en el conjunto $A \subset \mathbb{R}$ dado:

(a) $f_n(x) = x^n \qquad A = (-1, 1]$

(b) $f_n(x) = \frac{e^x}{x^n} \qquad A = (1, +\infty)$

(c) $f_n(x) = n^2 x(1 - x^2)^n \qquad A = [0, 1]$

ii) Para la sucesión dada en (a), demostrar que la convergencia es uniforme sobre $B = (0, \frac{1}{2})$.

Idem para la sucesión dada en (b) sobre $B = [2, 5]$.

¿Es uniforme la convergencia de la sucesión dada en (c) sobre A?

Ejercicio 2. Sea (X, d) un espacio métrico y sea A un conjunto. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X^A$ una sucesión de funciones y sea $f : X \to A$. Probar que: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **no** converge uniformemente a f en A si y sólo si existen $\alpha > 0$, una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y una sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset A$ tales que $d(f_{n_k}(a_k), f(a_k)) \geq \alpha$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 3. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

i) $f_n(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$ en $\mathbb{R}$

ii) $f_n(x) = \operatorname{sen}(\frac{x}{n})$ en $\mathbb{R}$

iii) $f_n(x, y) = \frac{n}{n+1}(x, y)$ en $\mathbb{R}^2$

iv) $f_n(x) = (1 + \frac{1}{n})x$ en $[0, 1]$

v) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \text{ ó } x = 0 \\ b + \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{a}{b}\ , b > 0 \text{ y } (a : b) = 1 \end{cases}$ en $[0, 1]$

vi) $f_n(z) = z^n$ en $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

Ejercicio 4. Probar que la sucesión de funciones $f_n(x) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{x(x^2+1)}{1+(n+1)^2x^2}$ $(n \in \mathbb{N})$ converge puntualmente pero no uniformemente, en $\mathbb{R}$, a una función continua.

Ejercicio 5. Sea $C^1[0, 1]$ el epacio vectorial de las funciones $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de clase C^1 en $[0, 1]$ (esto es continuas en $[0, 1]$ y con derivada f' continua en $[0, 1]$).

1. Consideremos la aplicación lineal $D : (C^1[0, 1], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ dada por $D(f) = f'$. Mostrar que no es continua.

2. En cambio si en $C^1[0, 1]$ consideramos la norma:

$$\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

$D : (C^1[0, 1], \|\cdot\|_{C^1}) \to (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ sí resulta continua.

3. Probar que $C^1[0,1]$ no es completo con la norma $\|\cdot\|_\infty$ pero sí lo es con $\|\cdot\|_{C^1}$.

Ejercicio 6. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de las sucesiones $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2}$ y f_n' en $[-1,1]$.

Ejercicio 7. Sea X un conjunto y sea $B(X) = \{g : X \longrightarrow \mathbb{C} : g \text{ es acotada }\}$. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(X)$.

i) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a una función f en X, ¿es cierto que $f \in B(X)$?

ii) Probar que:

(a) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a una función f en X, entonces $f \in B(X)$.

(b) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f si y sólo si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $(B(X), d_\infty)$

(c) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en X, entonces existe $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ $\forall\, x \in X\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, es decir, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada.

Ejercicio 8. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ una sucesión de funciones uniformemente continuas que converge uniformemente a una función f sobre $\mathbb{R}$. Analizar la continuidad uniforme de f.

Ejercicio 9. Sea (X,d) un espacio métrico y sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^X$ dos sucesiones de funciones continuas uniformemente convergentes sobre X a f y g respectivamente. Probar que:

i) $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $f+g$ sobre X.

ii) Si ambas sucesiones están uniformemente acotadas, entonces $(f_n.g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente convergente a $f.g$.

Ejercicio 10. Sea (X,d) un espacio métrico compacto y sea A un conjunto. Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^X$ y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X^A$ sucesiones de funciones que convergen uniformemente a funciones $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : A \longrightarrow X$ respectivamente. Probar que $(f_n \circ g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^A$ converge uniformemente a $f \circ g$.

Ejercicio 11. (Teorema de Dini) Sea (X,d) un espacio métrico compacto y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ tales que:

- $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)\ \forall\, x \in X\ \forall\, n \in \mathbb{N}$
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.

Probar que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en X.

Ejercicio 12. Sea (X,d) un espacio métrico compacto. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ y sea $f : X \to \mathbb{R}$ continua. Probar que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a $x \in X$, la sucesión $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$.

Ejercicio 13. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones definidas sobre X a valores en Y se dice *equicontinua en* $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x,x_0) < \delta \Longrightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \qquad \forall\, f \in \mathcal{F}$$

Se dice que $\mathcal{F}$ es *equicontinua* en X si es equicontinua en x para todo $x \in X$. Finalmente, la familia $\mathcal{F}$ se dice *uniformemente equicontinua* en X si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x,y) < \delta \Longrightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \qquad \forall\, f \in \mathcal{F}$$

i) Probar que cualquier conjunto finito de funciones de X en Y continuas en $x_0 \in X$ es equicontinuo en x_0.

ii) Supongamos que X es compacto. Probar que:

(a) Si una familia $\mathcal{F}$ es equicontinua en X, entonces es uniformemente equicontinua.

(b) Si $f_n : X \longrightarrow Y$ es continua para todo $n \in \mathbb{N}$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en X, entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es equicontinua en X (por lo tanto es uniformemente equicontinua).

(c) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones uniformemente equicontinua y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f en X, entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en X.

Ejercicio 14. Sean $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables y uniformemente acotadas. Se define

$$F_n(x) = \int_a^b f_n(t)\ dt \qquad\qquad (a \leq x \leq b)$$

Probar que existe una subsucesión (F_{n_k}) que converge uniformemente sobre $[a,b]$.

Ejercicio 15. Si la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, probar que también lo hacen las siguientes series:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n} \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$$

Ejercicio 16. *Criterio de la Integral*
Sea $f : [1,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ una función decreciente, continua y tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se definen

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \qquad\qquad T_n = \int_1^n f(x)\ dx \qquad\qquad D_n = S_n - T_n$$

Probar que:

i) $0 < f(n+1) \leq D_{n+1} \leq D_n \leq f(1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

ii) Existe $D = \lim\limits_{n\to+\infty} D_n$

iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge si y sólo si $\int\limits_1^{\infty} f(x)\, dx$ converge

iv) $0 \leq D_n - D \leq f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 17. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Probar que:

i) $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} - \sum\limits_{k=1}^{n} A_k(b_{k+1} - b_k)$

ii) Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n)$ converge absolutamente, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

iii) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n)$ converge absolutamente y $b_n \to 0$, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

Ejercicio 18. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas definidas sobre un espacio métrico (X,d) a valores en $\mathbb{R}$ tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente sobre X. Probar que:

i) $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ es continua en X.

ii) Si $X = [a,b] \subset \mathbb{R}$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$

Ejercicio 19. (Test de Weierstrass) Sea (X,d) un espacio métrico y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in X$. Probar que si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniforme y absolutamente en X.

Ejercicio 20. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente. Probar que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx)$ convergen uniformemente en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 21. Hallar (y justificar) los conjuntos en $\mathbb{R}$ de convergencia puntual, uniforme y no convergencia de las siguientes series
$(a)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ $\quad (b)\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n$ $\quad (c)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ $\quad (d)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\quad (e)\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$

Ejercicio 22.

i) Mostrar que la serie $\operatorname{sen} x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1}$ converge uniformemente sobre todo intervalo finito.

ii) Probar que la función $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)^2$ es continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 23. Sea $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(nx)^2}$.

i) Hallar el dominio de f en $\mathbb{R}$.

ii) ¿Sobre qué intervalos converge uniformemente?

iii) ¿Sobre qué intervalos no converge uniformemente?

iv) ¿Es f continua en su dominio?

v) ¿Es f acotada?

Ejercicio 24. Sea $f \in C[0,1]$ tal que $\int_0^1 f(x)x^n\, dx = 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N}_0$. Probar que $f \equiv 0$.

Ejercicio 25. (Función zeta de Riemann) Consideramos la función dada por la serie:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

1. Probar que la serie converge uniformemente en cada intervalo $(1+\varepsilon, \infty)$ (siendo $\varepsilon > 0$)
2. Probar que $\zeta(s)$ es continua en $(1, +\infty)$ y que es posible derivar la serie término a término en dicho intervalo.
3. Probar que si $P \subset \mathbb{N}$ designa el conjunto de los números primos, entonces
$$\zeta(s) = \prod_{p \in P} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$
4. Probar que $\lim_{s \to 1^+} \zeta(s) = \infty$. Deducir que existen infinitos números primos.