Práctica 2: Cardinalidad

Ejercicio 1. Demostrar las siguientes igualdades de conjuntos:

i) $B - \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(B - A_i)$

ii) $B - \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(B - A_i)$

iii) $\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B) = B \cap \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)$

Ejercicio 2. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos y sea $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Hallar una familia de conjuntos $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que verifique simultáneamente:

- $B_n \subseteq A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$
- $B_k \cap B_j = \emptyset$ si $k \neq j$
- $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$

Ejercicio 3. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función y sean A y B subconjuntos de X.

i) Demostrar que:

   a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

   b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

ii) Generalizar al caso de uniones e intersecciones infinitas.

iii) Exhibir un ejemplo donde la inclusión en i) (b) sea estricta.

Ejercicio 4. Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función, $A \subseteq X$ y $B, B_1, B_2 \subseteq Y$. Demostrar que:

i) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

ii) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

iii) $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$

iv) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

v) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

Generalizar iv) y v) al caso de uniones e intersecciones infinitas.

Ejercicio 5. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que $f(f^{-1}(B)) = B$ para cada $B \subseteq Y$ si y sólo si f es suryectiva.

Ejercicio 6. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que las siguientes propiedades son equivalentes:

i) f es inyectiva

ii) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ para todo $A, B \subseteq X$

iii) $f^{-1}(f(A)) = A$ para todo $A \subseteq X$

iv) $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ para todo par de subconjuntos A, B tales que $A \cap B = \emptyset$

v) $f(A - B) = f(A) - f(B)$ para todo $B \subseteq A \subseteq X$

Ejercicio 7. Para cada subconjunto S de un conjunto A dado se define la *función característica de* S, $\mathcal{X}_S : A \longrightarrow \{0, 1\}$, por

$$\mathcal{X}_S(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in S \\ 0 & \text{si } a \notin S \end{cases}$$

Probar que:

i) $\mathcal{X}_{S \cap T} = \mathcal{X}_S \cdot \mathcal{X}_T$ para todo par de subconjuntos $S, T \subseteq A$

ii) $\mathcal{X}_{A-S} = 1 - \mathcal{X}_S$ para todo $S \subseteq A$

iii) $\mathcal{X}_S \ + \ \mathcal{X}_T = \mathcal{X}_{S \cup T} \ + \ \mathcal{X}_{S \cap T}$ para todo $S, T \subseteq A$

Ejercicio 8. Demostrar que si A es un conjunto de n elementos, entonces $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos.

Ejercicio 9. Sea A un conjunto. Probar que son equivalentes:

i) A es infinito (*i.e. tiene un subconjunto en biyección con* $\mathbb{N}$*)*

ii) Para todo $x \in A$, existe una función $f_x : A \to A - \{x\}$ biyectiva

iii) Para todo $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset A$, existe una función $f_{\{x_1,\ldots,x_n\}} : A \to A - \{x_1, \ldots, x_n\}$ biyectiva.

Ejercicio 10. Sea A un conjunto numerable. Supongamos que existe una función sobreyectiva de A en un conjunto B. Probar que B es a lo sumo numerable.

Ejercicio 11. Probar que los siguientes conjuntos son numerables (es decir, tienen cardinal $\aleph_0$):

$$\mathbb{Z}_{\leq -1} \quad ; \quad \mathbb{Z}_{\geq -3} \quad ; \quad 3.\mathbb{N} \quad ; \quad \mathbb{Z} \quad ; \quad \mathbb{N}^2 \quad ; \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad ; \quad \mathbb{Q} \quad ; \quad \mathbb{N}^m \quad (m \in \mathbb{N})$$

Ejercicio 12.

i) Sean A y B conjuntos a lo sumo numerables. Probar que $A \cup B$ es a lo sumo numerable.

ii) Sea $\mathcal{A}$ un conjunto finito y $\mathcal{S} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^m$. Probar que $\sharp(\mathcal{S}) = \aleph_0$.

Deducir que, cualquiera sea el alfabeto utilizado, hay más números reales que palabras para nombrarlos. ¿Cuántos subconjuntos de $\mathbb{N}^2$ pueden ser definidos en un lenguaje fijo? ¿Cuántos hay en total?

Ejercicio 13. Sean A y B conjuntos, A infinito y B numerable. Probar que existe una biyección entre $A \cup B$ y A.

Ejercicio 14. Probar que el conjunto de todos los polinomios con coeficientes racionales es numerable.

Ejercicio 15. Se dice que un número complejo z es *algebraico* si existen enteros $a_0, \ldots, a_n$ no todos nulos, tales que

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = 0$$

i) Demostrar que el conjunto de todos los números algebraicos es numerable.

ii) Deducir que existen números reales que no son algebraicos.

NOTA: Estos números se llaman *trascendentes*.

Ejercicio 16. Sea $X \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ un conjunto de números reales positivos. Supongamos que existe una constante positiva C tal que para cualquier subconjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ vale $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq C$. Probar que X es a lo sumo numerable.

Ejercicio 17. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función monótona. Probar que:

$$\sharp(\{x \in \mathbb{R} \ / \ f \text{ no es continua en } x\}) \leq \aleph_0$$

Ejercicio 18. Probar que si A es un conjunto numerable, el conjunto de las partes finitas de A (es decir, el subconjunto de $\mathcal{P}(A)$ formado por los subconjuntos finitos de A) es numerable.

Ejercicio 19. Hallar el cardinal de los siguientes conjuntos de sucesiones:

i) $\{(a_n) \ / \ a_n \in \mathbb{N} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$

ii) $\{(a_n) \subset \mathbb{N} \ / \ a_n \leq a_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$

iii) $\{(a_n) \subset \mathbb{N} \ / \ a_n \geq a_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$

iv) $\{(q_n) \subset \mathbb{Q} \ / \ \lim_{n \to \infty} q_n = 0\}$

v) $\{(q_n) \subset \mathbb{Q} \ / \ (q_n) \text{ es periódica}\}$

vi) $\{(a_n) \subset \mathbb{N} \ / \ 1 \leq a_n \leq m \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$ $\quad (m \in \mathbb{N})$

Ejercicio 20. Hallar el cardinal de los siguientes conjuntos:

i) $\{I \ / \ I$ es un intervalo de extremos racionales$\}$

ii) $\{[a,b] \ / \ a,b \in \mathbb{R}\}$

iii) I , sabiendo que $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}$ es una familia de intervalos disjuntos

iv) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 3x+2y \geq 7\}$

v) $\mathbb{R}_{>0}$

Ejercicio 21. Probar que la unión numerable de conjuntos de cardinal c tiene cardinal c.

Ejercicio 22. Sean a, b, c cardinales. Probar que:

i) $a.(b+c) = a.b + a.c$

ii) $a^{b+c} = a^b.\ a^c$

iii) $(a^b)^c = a^{bc}$

iv) $(ab)^c = a^c.\ b^c$

v) Si $b \leq c$, entonces $a^b \leq a^c$ y $b^a \leq c^a$

Ejercicio 23. Probar que $n^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = c^{\aleph_0} = c$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Ejercicio 24. Se consideran los siguientes conjuntos de funciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbb{R}) &= \{f \ / \ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\} & \qquad \mathcal{F}(\mathbb{Q}) &= \{f \ / \ f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}\} \\ \mathcal{C}(\mathbb{R}) &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \ / \ f \text{ es continua}\} & \qquad \mathcal{C}(\mathbb{Q}) &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{Q}) \ / \ f \text{ es continua}\} \end{aligned}$$

i) Probar que $\sharp(\mathcal{F}(\mathbb{R})) > c$.

ii) Calcular $\sharp(\mathcal{F}(\mathbb{Q}))$.

iii) Calcular $\sharp(\mathcal{C}(\mathbb{Q}))$.

iv) Probar que la función $\phi : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{Q})$ dada por $\phi(f) = f|_{\mathbb{Q}}$ es inyectiva. ¿Qué significa esto?

v) Calcular $\sharp(\mathcal{C}(\mathbb{R}))$.

Ejercicio 25. Probar que el conjunto de partes numerables de $\mathbb{R}$ (es decir, el subconjunto de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ formado por todos los subconjuntos numerables de $\mathbb{R}$) tiene cardinal c.