Práctica 3: Espacios Métricos

Ejercicio 1. Probar que toda colección de conjuntos abiertos disjuntos de $\mathbb{R}^n$ es necesariamente numerable. Dar un ejemplo de colección de conjuntos cerrados disjuntos que no sea numerable.

Ejercicio 2. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un *punto de condensación* de S si toda n-bola $B(x)$ tiene la propiedad de que $B(x) \cap S$ es no numerable. Probar que si S es no numerable entonces existe un punto $x \in S$ de condensación de S.

Ejercicio 3. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$, probar que la colección de puntos aislados de S es numerable.

Ejercicio 4. Se definen las funciones $d_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq 5)$ por:

$$d_1(x,y) = (x-y)^2 \qquad , \qquad d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|} \qquad , \qquad d_3(x,y) = |x^2 - y^2|$$

$$d_4(x,y) = |x - 2y| \qquad , \qquad d_5(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$

Determinar cuáles de estas funciones son métricas en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 5.

i) Probar que las siguientes funciones son métricas en $\mathbb{R}^n$:

a) $d_1(x,y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

b) $d_2(x,y) = \Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\Big)^{1/2}$

c) $d_\infty(x,y) = \displaystyle\sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$.

ii) Para $n = 2$, dibujar las tres bolas abiertas $B(0,1)$ de centro $0 \in \mathbb{R}^2$ y radio 1.

Ejercicio 6. Sea X un conjunto y $\delta : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Verificar que δ es una métrica y hallar los abiertos de (X, δ).
Nota: δ se llama *métrica discreta* y (X, δ) *espacio métrico discreto.*

Ejercicio 7. Sea $\ell^1 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \ / \ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ es convergente}\}$. Se considera $d : \ell^1 \times \ell^1 \to \mathbb{R}$ definida por $d((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|$. Probar que (ℓ^1, d) es un espacio métrico.

Ejercicio 8. Sea $\ell^\infty = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \ / \ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es acotada}\}$. Se considera $d : \ell^\infty \times \ell^\infty \to \mathbb{R}$ definida por $d((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|$. Probar que (ℓ^∞, d) es un espacio métrico.

Ejercicio 9. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, se define $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ es continua }\}$. Probar que son espacios métricos:

i) $(C[a,b], d_1)$, con $d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$

ii) $(C[a,b], d_\infty)$, con $d_\infty(f,g) = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$.

Ejercicio 10. Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) espacios métricos. Probar que las siguientes aplicaciones definen métricas en el conjunto $X_1 \times X_2$

i) $d : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$.

ii) $d_\infty : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d_\infty((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \text{máx}\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$.

Ejercicio 11.

i) Sea (X, d) un espacio métrico. Se define $d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$. Probar que d' es una métrica en X topológicamente equivalente a d.

ii) Sea $(X_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ vale $0 \leq d_n(x,y) \leq 1$ para todo par de elementos $x, y \in X_n$. Para cada $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definimos:

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}$$

Probar que d es una métrica en el espacio producto $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$.

iii) Sea (X, d) un espacio métrico. Llamamos $X^{\mathbb{N}}$ al conjunto de las sucesiones de X. Mostrar que $X^{\mathbb{N}}$ es un espacio métrico con una distancia conveniente.

Ejercicio 12. Sean d_∞ y d_2 las métricas en $\mathbb{R}^n$ definidas en el Ejercicio 5. Mostrar que un conjunto es abierto para d_∞ si y sólo si lo es para d_2.

Ejercicio 13. *Propiedades topológicas.* Sea (X, d) un espacio métrico y sean $A, B \subseteq X$

i) Probar las siguientes propiedades del *interior* de un conjunto:

a) $A^\circ \;=\; \bigcup\limits_{\substack{G \text{ abierto} \\ G \subseteq A}} G$

b) $\emptyset^\circ = \emptyset$ y $X^\circ = X$

c) $A \subseteq B \implies A^\circ \subseteq B^\circ$

d) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$. ¿Se puede generalizar a una intersección infinita?

e) $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$. ¿Vale la igualdad?

ii) Probar las siguientes propiedades de la *clausura* de un conjunto:

a) $\overline{A} = \bigcap\limits_{\substack{F \text{ cerrado} \\ A \subseteq F}} F$

b) $\overline{\emptyset} = \emptyset$ y $\overline{X} = X$

c) $A \subseteq B \implies \overline{A} \subseteq \overline{B}$

d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. ¿Se puede generalizar a una unión infinita?

e) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

f) $x \in \overline{A} \iff$ Existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \longrightarrow x$

iii) Probar las siguientes propiedades que relacionan interior y clausura:

a) $(X - A)^\circ = X - \overline{A}$

b) $\overline{X - A} = X - A^\circ$

¿Son ciertas las igualdades: $\overline{A} = \overline{A^\circ}$, $A^\circ = (\overline{A})^\circ$?

iv) Probar las siguientes propiedades de la *frontera* de un conjunto:

a) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X - A}$

b) ∂A es cerrado

c) $\partial A = \partial(X - A)$

Ejercicio 14. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $G \subseteq X$ abierto y $F \subseteq X$ cerrado. Probar que $F - G$ es cerrado y $G - F$ es abierto.

Ejercicio 15. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $a \in X$ y $r \in \mathbb{R}_{>0}$, llamamos *bola cerrada de centro* a *y radio* r al conjunto $B[a, r] = \{x \in X \ / \ d(x, a) \leq r\}$.

i) Probar que $B[a, r]$ es un conjunto cerrado y que $\overline{B(a, r)} \subseteq B[a, r]$.

ii) Dar un ejemplo de un espacio métrico y una bola abierta $B(a, r)$ cuya clausura no sea $B[a, r]$.

Ejercicio 16. Sean (X, d_1) e (Y, d_2) espacios métricos. Se considera el espacio métrico $(X \times Y, d)$, donde d es la métrica definida en el Ejercicio 10. Probar que para $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ valen:

i) $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$

ii) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$

Ejercicio 17. Sea (X, d) un espacio métrico y sean A, B subconjuntos de X.

i) Probar las siguientes propiedades del *derivado* de un conjunto:

a) A' es cerrado

b) $A \subseteq B \implies A' \subseteq B'$

c) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

d) $\overline{A} = A \cup A'$

e) $(\overline{A})' = A'$

ii) Probar que $x \in X$ es un punto de acumulación de $A \subseteq X$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \longrightarrow x$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es casi constante.

Ejercicio 18. Hallar interior, clausura, conjunto derivado y frontera de cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$. Determinar cuáles son abiertos o cerrados.

$$[0,1] \quad ; \quad (0,1) \quad ; \quad \mathbb{Q} \quad ; \quad \mathbb{Q} \cap [0,1] \quad ; \quad \mathbb{Z} \quad ; \quad [0,1) \cup \{2\}$$

Ejercicio 19. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor.

1. Probar que $\mathcal{C}$ es cerrado y acotado (luego compacto).
2. Probar que $\mathcal{C}$ es perfecto (i.e. $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ y no vacío).
3. Probar que $\mathcal{C}$ tiene interior vacío.
4. Probar que $x \in \mathcal{C}$ si y sólo si su desarrollo en base 3 tiene sólo las cifras 0 y 2.
5. Probar que $\mathcal{C}$ tiene la potencia del continuo.

Ejercicio 20. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Probar que si $P \subseteq X$es perfecto entonces es no numerable.

Ejercicio 21. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en X.

i) Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, probar que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$.

ii) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones de Cauchy en X, probar que la sucesión real $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Ejercicio 22. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $A \subseteq X$ no vacío y $x \in X$, se define la *distancia de x a A* como $d(x, A) = \text{ínf}\{d(x, a) \ / \ a \in A\}$. Probar:

i) $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ para todo par de elementos $x, y \in X$

ii) $x \in A \implies d(x, A) = 0$

iii) $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$

iv) $B(A, r) = \{x \in X \ / \ d(x, A) < r\}$ es abierto para todo $r > 0$

v) $B[A, r] = \{x \in X \ / \ d(x, A) \leq r\}$ es cerrado para todo $r > 0$

Ejercicio 23. Un subconjunto A de un espacio métrico X se dice un G_δ (resp. un F_σ) si es intersección de una sucesión de abiertos (resp. unión de una sucesión de cerrados) de X.

i) Probar que el complemento de un G_δ es un F_σ.

ii) Probar que el complemento de un F_σ es un G_δ.

ii) Probar que todo cerrado es un G_δ. Deducir que todo abierto es un F_σ.

iv) *a*) Exhibir una sucesión de abiertos de $\mathbb{R}$ cuya intersección sea $[0, 1)$. Idem con $[0, 1]$.
b) Exhibir una sucesión de cerrados de $\mathbb{R}$ cuya unión sea $[0, 1)$.

¿Qué conclusión saca de estos ejemplos?

Ejercicio 24. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $A, B \subseteq X$ no vacíos se define la *distancia entre A y B* por $d(A, B) = \text{ínf}\{d(a, b) \ / \ a \in A \ , \ b \in B\}$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

i) $d(A, B) = d(\overline{A}, B)$

ii) $d(A, B) = 0 \iff A \cap B \neq \emptyset$

iii) $d(A, B) = 0 \iff \overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$

iv) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$