

PRÁCTICA 4: ESPACIOS MÉTRICOS

Ejercicio 1.

- i) Sea G la colección de todas las bolas $B(q, r)$ de \mathbb{R}^n con centro $q \in \mathbb{Q}^n$ y radio racional r . Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $x \in S$. Probar que $\exists B_k \in G$ tal que $x \in B_k \subseteq S$.
- ii) Probar que \mathbb{R}^n (con la distancia euclídea) es separable.

Ejercicio 2. Sea $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} / \exists n_0 : a_n = 0 \forall n \geq n_0\}$.

Se considera la aplicación $d_\infty : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \times \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_\infty((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup\{|a_n - b_n| : n \in \mathbb{N}\}$. Probar que $(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, d_\infty)$ es un espacio métrico separable.

Ejercicio 3. Sea (X, d) un espacio métrico, que verifica que cada cubrimiento abierto de X tiene un subcubrimiento numerable. Probar que X es separable.

Ejercicio 4. Sea (X, d) un espacio métrico separable. Probar que toda familia de subconjuntos de X no vacíos, abiertos y disjuntos dos a dos es a lo sumo numerable. Deducir que el conjunto de puntos aislados de X es a lo sumo numerable.

Ejercicio 5. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es separable si y sólo si (X, d) e (Y, d') lo son.

Ejercicio 6. Probar que (ℓ^1, d_1) es separable.

Ejercicio 7. ¿Es el espacio (ℓ^∞, d_∞) separable?.

Ejercicio 8. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$. Probar:

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ si y sólo si para toda subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$
- ii) Si existe $x \in X$ para el cual toda subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(x_{n_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_{k_j}} = x$, entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge y $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$
- iii) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente, entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy. ¿Vale la recíproca?

Ejercicio 9. Probar que si toda bola cerrada de un espacio métrico X es un subespacio completo de X , entonces X es completo.

Ejercicio 10. Sea (X, d) un espacio métrico.

- i) Probar que todo subespacio completo de (X, d) es un subconjunto cerrado de X .
- ii) Probar que si X es completo, entonces todo subconjunto $F \subseteq X$ cerrado, es un subespacio completo de X .

Ejercicio 11.

- i) Sea X un espacio métrico y sea $B(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ es acotada}\}$. Probar que $(B(X), d_\infty)$ es un espacio métrico completo, donde $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$.
- ii) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Probar que $(C[a, b], d_\infty)$ es un espacio métrico completo.

Ejercicio 12. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\mathcal{D} \subset X$ un subconjunto denso con la propiedad que toda sucesión de Cauchy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ converge en X . Probar que X es completo.

Ejercicio 13. Sean (X, d) un espacio métrico completo sin puntos aislados y sea D un subconjunto denso y numerable de X . Probar que D no es un G_δ .

Ejercicio 14. Demostrar que no existe ninguna función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que sea continua sólo en los racionales.
Sugerencia: Para cada $n \in \mathbb{N}$ considerar

$$U_n = \left\{ x \in \mathbb{R} / \exists U \subseteq \mathbb{R} \text{ abierto con } x \in U \text{ y } \text{diam}(f(U)) < \frac{1}{n} \right\}$$

Ejercicio 15. Sea $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de intervalos de $[0, 1]$ con extremos racionales y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$E_n = \{f \in C[0, 1] / f \text{ es monótona en } I_n\}.$$

- i) Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, E_n es cerrado y nunca denso en $(C[0, 1], d_\infty)$.
- ii) Deducir que existen funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$ que no son monótonas en ningún subintervalo.