Práctica 5: Espacios Métricos

Ejercicio 1. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y sea $f : X \longrightarrow Y$. Probar que:

i) f es continua en $x_0 \in X$ si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \longrightarrow x_0$, la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ converge a $f(x_0)$.

ii) Son equivalentes:

(a) f es continua

(b) Para todo $G \subset Y$ abierto, $f^{-1}(G)$ es abierto en X

(c) Para todo $F \subset Y$ cerrado, $f^{-1}(F)$ es cerrado en X

Ejercicio 2. Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ una función. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

i) Si $X = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, con cada U_i abierto y $f|_{U_i}$ continua para todo $i \in I$, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua.

ii) Si $X = \bigcup\limits_{i\in I} F_i$, con cada F_i cerrado y $f|_{F_i}$ continua para todo $i \in I$, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua.

iii) Si $X = \bigcup\limits_{i=1}^{m} F_i$, con cada F_i cerrado y $f|_{F_i}$ continua para cada $i = 1, \dots, m$, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua.

iv) Si $X = \bigcup\limits_{i=1}^{m} X_i$ y $f|_{X_i}$ continua para cada $i = 1, \dots, m$, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua.

Ejercicio 3. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f : X \to \mathbb{R}$. Probar que f es continua si y sólo si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, los conjuntos $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ y $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ son abiertos.

Ejercicio 4. Sea (X, d) un espacio métrico y sea A un subconjunto de X. Probar que la función $d_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_A(x) = d(x, A) = \inf\limits_{a\in A} d(x, a)$ es (uniformemente) continua.

Ejercicio 5. Decidir cuáles de las siguientes funciones son continuas:

i) $f : (\mathbb{R}^2, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\ |)$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, donde d representa la métrica euclídea.

ii) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, \delta) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, d_\infty)$, la función identidad, donde δ representa la métrica discreta.

iii) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, d_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \delta)$, la función identidad, donde δ representa la métrica discreta.

iv) $i : (E, d) \longrightarrow (X, d)$, la inclusión, donde $E \subset X$

Ejercicio 6. Sean $f, g, h : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases} \qquad g(x) = x.f(x) \qquad h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{m}{n}\ ,\ (m : n) = 1, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Probar que:

i) f es discontinua en todo punto

ii) g sólo es continua en $x = 0$

iii) h es continua en $[0,1] - \mathbb{Q}$

Ejercicio 7. *Métricas topológicamente equivalentes:*

i) Supongamos que existen constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que

$$d_1(x,y) \leq c_1 \; d_2(x,y) \leq c_2 \; d_1(x,y), \quad \text{para todo } x, y \in X.$$

Probar que d_1 y d_2 son topológicamente equivalentes.

ii) Probar que d_1 y d_2 son topológicamente equivalentes si y sólo si la función identidad $id_X : (X, d_1) \longrightarrow (X, d_2)$ es un homeomorfismo.

iii) Consideramos en $\mathbb{R}$ la métrica $d'(x,y) = \left| \dfrac{x}{1+|x|} - \dfrac{y}{1+|y|} \right|$.

Probar que $(\mathbb{R}, d')$ es topológicamente equivalente a $\mathbb{R}$ con la métrica usual $d(x,y) = |x-y|$, pero que $(\mathbb{R}, d')$ no es completo.

Ejercicio 8. Considerando en cada $\mathbb{R}^n$ la métrica euclídea, probar que:

i) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; / \; x^2 + y \operatorname{sen}(e^x - 1) = -2\}$ es cerrado.

ii) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; / \; -1 \leq x^3 - 3y^4 + z - 2 \leq 3\}$ es cerrado.

iii) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \; / \; 3 < x_1 - x_2\}$ es abierto.

Mencione otras dos métricas para las cuales siguen valiendo estas afirmaciones.

Ejercicio 9. Consideramos las funciones $E, I : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$E(f) = f(0) \text{ y } I(f) = \textstyle\int_0^1 f(x)\, dx$$

1. Demostrar que si utilizamos en $C([0,1])$, la distancia d_∞ ambas resultan continuas.
2. Demostrar que si, en cambio, utilizamos en $C([0,1])$ la distancia d_1, I es una función continua pero E no lo es.
3. Analizar si es posible que una función $F : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ sea continua para la distancia d_1 pero no para d_∞ ?

Ejercicio 10. Sean X, Y espacios métricos y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Probar que el gráfico de f, definido por

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$$

es cerrado en $X \times Y$ con la métrica d_∞. ¿Es cierta la afirmación recíproca?

Ejercicio 11. *Teorema de Urysohn.*
Sea (X,d) un espacio métrico y sean A, B cerrados disjuntos de X.

i) Probar que existe una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que:

$$f|_A \equiv 0 \qquad , \qquad f|_B \equiv 1 \qquad \text{y} \qquad 0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in X$$

Sugerencia: Considerar la función $f(x) = \frac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)}$.

ii) Deducir que existen abiertos $U, V \subset X$ disjuntos tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

Ejercicio 12. Sea (X, d) un espacio métrico, y sea $\Delta : X \longrightarrow X \times X$ la aplicación diagonal definida por $\Delta(x) = (x, x)$. Probar que:

i) Δ es un homeomorfismo entre X y $\{(x, x) : x \in X\} \subset X \times X$.

ii) $\Delta(X)$ es cerrado en $X \times X$.

Ejercicio 13. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ se dice *abierta* si $f(A)$ es abierto para todo abierto $A \subset X$ y se dice *cerrada* si $f(F)$ es cerrado para todo cerrado $F \subset X$.

i) Probar que si f es biyectiva entonces, f es abierta (cerrada) si y sólo si f^{-1} es continua.

ii) Dar un ejemplo de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ continua que no sea abierta.

iii) Dar un ejemplo de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ continua que no sea cerrada.

iv) Mostrar con un ejemplo que una función puede ser biyectiva, abierta y cerrada pero no continua.

Ejercicio 14. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función.

i) Probar que f es continua si y sólo si $f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$ para todo subconjunto $E \subset X$.

Mostrar con un ejemplo que la inclusión puede ser estricta.

ii) Probar que f es continua y cerrada si y sólo si $f(\overline{E}) = \overline{f(E)}$ para todo subconjunto $E \subset X$.

Ejercicio 15.

i) Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y sea $D \subset X$ denso. Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ funciones continuas. Probar que si $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$.

ii) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{Q}$. Probar que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \alpha\, x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 16. Sean X, Y espacios métricos. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suryectiva.

i) Probar que si X es separable, entonces Y es separable.

ii) ¿Es cierto que si X es completo, entonces Y es completo?

Ejercicio 17. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Consideramos en $X \times Y$ la métrica d_∞.

i) Probar que las proyecciones $\pi_1 : X \times Y \longrightarrow X$ y $\pi_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ son continuas y abiertas.

Mostrar con un ejemplo que pueden no ser cerradas.

ii) Sea (Z, δ) un espacio métrico y sea $f : Z \longrightarrow X \times Y$ una aplicación. Probar que f es continua si y sólo si $f_1 = \pi_1 \circ f$ y $f_2 = \pi_2 \circ f$ lo son.

Ejercicio 18. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es *semicontinua inferiormente* (resp. *superiormente*) en $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, x_0) < \delta \Longrightarrow f(x_0) < f(x) + \varepsilon \qquad \text{(resp. } f(x_0) + \varepsilon > f(x))$$

Probar que:

i) f es continua en x_0 si y sólo si f es semicontinua inferiormente y superiormente en x_0.

ii) f es semicontinua inferiormente si y sólo si $f^{-1}(\alpha, +\infty)$ es abierto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

iii) f es semicontinua superiormente si y sólo si $f^{-1}(-\infty, \alpha)$ es abierto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

iv) si $A \subset X$ es un abierto $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ es semicontinua inferiormente y si $F \subset X$ es un cerrado $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$ es semicontinua superiormente.

Ejercicio 19.

i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Probar que el conjunto $\{0\} \cup \{a_n \ / \ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ es compacto.

ii) Sea $S = (a, b) \cap \mathbb{Q}$ con $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Probar que S es un subconjunto cerrado y acotado pero no compacto de $(\mathbb{Q}, d)$, donde d es la métrica euclídea de $\mathbb{R}$.

Ejercicio 20. Sea $K \subset \mathbb{R}$ compacto. Probar que K tiene mínimo y máximo.

Ejercicio 21. Sea $A = \{a^{(n)} \in \ell^\infty \ / \ n \in \mathbb{N}\}$, donde cada sucesión $a^{(n)} = (a_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ está definida por

$$a_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq n \\ 1 & \text{si} \quad k = n \end{cases}$$

Probar que A es discreto, cerrado y acotado, pero no compacto.

Ejercicio 22. Dado un cubrimiento por abiertos $(U_i)_{i\in I}$ de un espacio métrico (X, d), un número $\varepsilon > 0$ se llama *número de Lebesgue* de $(U_i)_{i\in I}$ si para todo $x \in X$ existe $j \in I$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset U_j$. Probar que todo cubrimiento por abiertos de un espacio métrico compacto tiene un número de Lebesgue.

Ejercicio 23. Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que:

i) Toda unión finita y toda intersección (finita o infinita) de subconjuntos compactos de X es compacta.

ii) Si (X, d) es compacto, todo subconjunto cerrado de X es compacto.

iii) Un subconjunto $F \subset X$ es cerrado si y sólo si $F \cap K$ es cerrado para todo compacto $K \subset X$.

Ejercicio 24. Sea $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \ / \ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\}$. Se define en c_0 la métrica

$$d(x, y) = \sup\{|x_n - y_n| \ / \ n \in \mathbb{N}\}$$

i) Demostrar que para cada $x \in c_0$ la bola cerrada $B[x, 1] = \{y \in c_0 \ / \ d(x, y) \leq 1\}$ no es compacta.

ii) Probar que (c_0, d) es separable.

Ejercicio 25. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es compacto si y sólo si (X, d) e (Y, d') lo son.

Ejercicio 26. Sea (X, d) un espacio métrico.

i) Sean $K \subset X$ un compacto y sea $x \in X - K$. Probar que existe $y \in K$ tal que $d(x, K) = d(x, y)$; es decir, la distancia entre x y K 'se realiza'.

ii) Sean F, $K \subset X$ dos subconjuntos disjuntos de X tales que F es cerrado y K es compacto. Probar que la distancia $d(F, K)$ entre F y K es positiva.

iii) Sean $K_1, K_2 \subset X$ dos subconjuntos compactos de X tales que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Probar que existen $x_1 \in K_1$ y $x_2 \in K_2$ tales que $d(K_1, K_2) = d(x_1, x_2)$; es decir, la distancia entre K_1 y K_2 'se realiza'.

Ejercicio 27. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ continua y biyectiva. Probar que si (X, d) es compacto, entonces f es un homeomorfismo.

Ejercicio 28. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Probar que para cada espacio métrico (Y, d'), la proyección $\pi : X \times Y \to Y$ definida por $\pi(x, y) = y$ es cerrada si en $X \times Y$ se considera la métrica d_∞.

Ejercicio 29. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos, y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que si Y es compacto y el gráfico de f es cerrado en $(X \times Y, d_\infty)$, entonces f es continua.