Práctica 6: Espacios Métricos

Ejercicio 1.

i) Sea $f : \mathbb{R}_{\geq a} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que es uniformemente continua en $[a, b]$ y también en $[b, +\infty)$. Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geq a}$.

ii) Deducir que $\sqrt{x}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

iii) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subset X$ compacto. Probar que si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y $f(x) > 0$ para todo $x \in A$, entonces existe $K > 0$ tal que $f(x) \geq K$ para todo $x \in A$.

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y abierta.

i) Probar que f no tiene extremos locales; es decir, no existen $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $f(x_0) \leq f(x)$ (resp. $f(x_0) \geq f(x)$) para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

ii) Comprobar que existen $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tales que $f(\mathbb{R}) = (a, b)$.

iii) Mostrar que $f : \mathbb{R} \longrightarrow (a, b)$ es un homeomorfismo y que ella y su inversa son funciones monótonas.

Ejercicio 4. Sea (X, d) un espacio métrico compacto y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función semicontinua superiormente. Probar que f está acotada superiormente en X y que f alcanza máximo en X.

Ejercicio 5. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función que satisface:

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq c\, d(x_1, x_2)$$

para todo $x_1, x_2 \in X$, donde $c \geq 0$. Probar que f es uniformemente continua.

Ejercicio 6.

i) Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos, $A \subseteq X$ y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que si existen $\alpha > 0$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ sucesiones y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

   (a) $d(x_n, y_n) \longrightarrow 0$ para $n \to \infty$

   (b) $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \alpha$ para todo $n \geq n_0$

   entonces f no es uniformemente continua en A.

ii) Verificar que la función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. ¿Y en $\mathbb{R}_{\leq -\pi}$?

iii) Verificar que la función $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ no es uniformemente continua en $(0, 1)$.

Ejercicio 7.

i) Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ una función uniformemente continua y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Probar que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y.

ii) Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ un homeomorfismo uniforme. Probar que (X, d) es completo si y sólo si (Y, d') es completo.

En particular, si un espacio métrico X es completo para una métrica lo es para cualquier otra métrica uniformemente equivalente.

Ejercicio 8.

i) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada y continua pero no uniformemente continua.

ii) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ no acotada y uniformemente continua.

Ejercicio 9. Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ una función uniformemente continua, y sean $A, B \subset X$ conjuntos no vacíos tales que $d(A, B) = 0$. Probar que $d'(f(A), f(B)) = 0$.

Ejercicio 10. Sean X e Y espacios métricos, Y completo. Sea $D \subset X$ denso y sea $f : D \longrightarrow Y$ una función uniformemente continua. Probar que f tiene una única extensión continua a todo X, es decir, existe una única función $F : X \longrightarrow Y$ continua tal que $F|_D = f$. (Más aún, F es uniformemente continua).

Ejercicio 11. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son conexos:

$\{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 < |x| < 2\}$, $\mathbb{N}$, $[0, 1)$, $\mathbb{Q}$, $\{\frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}\}$

$B(a, \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ en un espacio métrico (X, d).

Ejercicio 12. Dar ejemplos de conjuntos conexos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ tales que $A \cap B$ no sea conexo. Idem para $A \setminus B$.

Ejercicio 13. Sean X un espacio métrico y $C \subset X$

i) Probar que si C es conexo y x es un punto de acumulación de C entonces $C \cup \{x\}$ es conexo.

ii) Determinar la validez de las siguientes afirmaciones:

   (a) Si C es conexo, entonces C° es conexo.
   (b) Si C es conexo, entonces $\overline{C}$ es conexo.

Ejercicio 14. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $C \subset X$. Probar que son equivalentes:

i) C es conexo.

ii) No existen $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ abiertos en X y disjuntos, de modo que $C \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, $C \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ y $C \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$.

iii) Si $A \subset C$ es no vacío y abierto y cerrado en C, entonces $A = C$.

iv) Toda función $f : C \to \{0, 1\}$ continua es constante.

Ejercicio 15. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ continua. Probar que f es constante.

Ejercicio 16. Probar que si $n \geq 2$ no existe un homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 17.

i) Probar que si $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ es continua, existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

ii) Sea (X, d) un espacio métrico conexo y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Sean $a, b \in f(X)$ tales que $a \leq b$. Probar que para todo $c \in [a, b]$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = c$.

iii) Probar que si (X, d) es conexo, entonces $\sharp X = 1$ o $\sharp X \geq c$.

Ejercicio 18. Hallar las componentes conexas de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ y de $\mathbb{R}^2$

i) $\operatorname{arcsen}([\frac{\sqrt{2}}{2}, 1])$

ii) $\mathbb{Q}$

iii) $B((-1,0),1) \cup B((1,0),1)$

iv) $B((-1,0),1) \cup B((1,0),1) \cup \{(0,0)\}$

Ejercicio 19. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \{\frac{1}{n}\} \times [0,1]$, y sea $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup \{(0,0),(0,1)\}$. Probar que:

i) $\{(0,0)\}$ y $\{(0,1)\}$ son componentes conexas de X

ii) Si $B \subset X$ es abierto y cerrado en X, entonces $\{(0,0),(0,1)\} \subset B$ ó $\{(0,0),(0,1)\} \cap B = \emptyset$.

Ejercicio 20. Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que las componentes conexas de X son conjuntos cerrados.

Ejercicio 21. Sea (X, d) un espacio métrico. Un conjunto $A \subset X$ se dice *arcoconexo* (o *conexo por arcos*) si para todo par de puntos $a, b \in A$ existe una función continua $f : [0,1] \to X$ tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$.

i) Probar que todo conjunto arcoconexo es conexo.

ii) Exhibir un ejemplo de un conjunto conexo que no sea arcoconexo.

Ejercicio 22. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son arcoconexos:

i) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = f(x,y)\}$ donde $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua.

ii) $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)$.

iii) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \ / \ x \in \mathbb{R}\}$.

iv) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Ejercicio 23. Sean (X, d) un espacio métrico arcoconexo, (Y, d') un espacio métrico y $f : X \to Y$ una función continua. Probar que el conjunto $f(X)$ es arcoconexo.

Ejercicio 24. En el espacio $(C[0,1], d_\infty)$ se considera el conjunto

$$U = \{f \in C[0,1] : f(x) \neq 0 \ \forall \ x \in [0,1]\}$$

Probar que U es abierto y hallar sus componentes conexas.