Práctica 8: Espacios Normados II

Ejercicio 1. Demostrar que si una función $f \in C[a,b]$ continua, satisface que, $\forall k \geq 0$, $M_k(f) := \int_a^b x^k f(x)\, dx = 0$, entonces $f \equiv 0$. Deducir que si $f, g \in C[a,b]$, $f \equiv g$ si y sólo si $M_k(f) = M_k(g)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 2. Sean X e Y espacios métricos compactos y sea $F \in C(X \times Y)$ una función continua. Probar que F puede ser aproximada uniformemente por funciones de la forma $\sum_{k=1}^{n} f_k g_k$ donde, para cada $k \in \mathbb{N}$, $f_k \in C(X)$ y $g_k \in C(Y)$

Ejercicio 3. Sea X un espacio métrico compacto. Demostrar que una condición necesaria para que una familia $\mathcal{F} \subset (C(X), \| \cdot \|_\infty)$ sea densa es que $\mathcal{F}$ separe puntos. Concluir que la familia de polinomios que tienen todos sus términos de grado par no puede ser densa en $C[-1,1]$ ¿y en $C[0,1]$?.

Ejercicio 4. Sea $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Se sabe que para cada $(x,y) \in S^1$ existe un único $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $(x,y) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Una función continua $P : S^1 \to \mathbb{R}$ es un *polinomio trigonométrico* si, para todo $\theta \in [0, 2\pi)$ existen $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$P(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = a_0 + (a_1 \cos\theta + b_1 \operatorname{sen}\theta) + \ldots + (a_n \cos\theta + b_n \operatorname{sen}\theta).$$

Probar que toda función $f : S^1 \to \mathbb{R}$ continua puede ser aproximada por polinomios trigonométricos.

Ejercicio 5. Sea $f \in C^1[a,b]$. Si $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de polinomios que converge uniformemente a f' en $[a,b]$ entonces $p_n(x) := f(a) + \int_a^x q_n(t)dt$ define una sucesión de polinomios $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que p_n converge a f y p_n' converge a f' uniformemente en $[a,b]$.

Ejercicio 6. Sea $X \subset \mathbb{C}^n$ compacto. Probar que toda función continua $f : X \to \mathbb{C}$ puede ser aproximada uniformemente por polinomios en las variables $z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n$ con coeficientes reales.

Ejercicio 7. Sean $(X, \|.\|_X)$ e $(Y, \|.\|_Y)$ espacios normados y $B(X,Y) = \{f : X \to Y : \sup_{x \in X} \|f(x)\|_Y < \infty\}$. Probar que si $A \subset B(X,Y)$ es equicontinuo entonces $\overline{A}$ también.

Ejercicio 8. Sean $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables y uniformemente acotadas. Se define

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, dt \qquad (a \leq x \leq b)$$

Probar que existe una subsucesión (F_{n_k}) que converge uniformemente sobre $[a,b]$.

Ejercicio 9. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de funciones $f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1-nx)x^2}$. Probar que

1. $\{f_n\}$ es uniformemente acotada en $[0,1]$.
2. existe el límite puntual de $\{f_n\}$ en $[0,1]$.
3. ninguna subsucesión de $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[0,1]$.

Ejercicio 10. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado de dimensión n y sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ un isomorfismo algebraico. Consideramos en $\mathbb{R}^n$ la norma :$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$

1. Probar que $K = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \|x\|_\infty = 1\}$ es compacto en $\mathbb{R}^n$
2. Probar que existen $c_1,\ c_2 > 0$ tales que para todo $x \in \mathbb{R}^n$:$c_1\|x\|_\infty \leq \|f(x)\|_E \leq c_2\|x\|_\infty$
3. Deducir que si $N_1,\ N_2$ son dos normas en $\mathbb{R}^n$, entonces existen constantes $a, b > 0$ tales que para todo $x \in \mathbb{R}^n$: $aN_1(x) \leq N_2(x) \leq bN_2(x)$ (esto es: son equivalentes)

Ejercicio 11. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $S \subset E$ un subespacio (vectorial). Probar que:

1. $\overline{S}$ también es un subespacio.
2. Si $S \neq E$, entonces $S^o = \emptyset$.
3. Si $dim(S) < \infty$, entonces S es cerrado
4. Si S es un hiperplano (o sea: $\exists\ x \neq 0 \in E$ tal que $S \oplus \langle x\rangle = E$), entonces S es o bien denso o bien cerrado en E.

Ejercicio 12. Para cada uno de los siguientes ejemplos de subespacios decidir si son cerrados, si son densos y si son hiperplanos.

1. $c = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} :\ \exists \lim_{n\to\infty} x_n\} \subset l^\infty$
2. $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \to 0\} \subset c$
3. $\mathbb{R}[X]$(polinomios en una variable) $\subset C[0,1]$
4. $C^1[a,b] \subset C[a,b]$

Ejercicio 13. Sean E y F espacios normados. Sea $T : E \to F$ una operador lineal. Probar que son equivalentes:

1. T es continuo en 0.
2. $\exists x_0 \in E$ tal que T es continuo en x_0.
3. T es continuo.
4. T es uniformemente continuo.
5. $\exists M > 0/\ \forall x \in M\ : \|Tx\| \leq M\|x\|$. ($T$ es acotada)
6. $\forall A \subset E$ acotado, $T(A)$ es acotado.

Ejercicio 14. Sean E y F espacios normados y sea $T : E \to F$ un operador lineal y continuo. Verificar las siguientes fórmulas:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \text{ínf}\{M/\ \|Tx\| \leq M\|x\|\}$$

Ejercicio 15. Sea $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continua y sea $K : C[0,1] \to C[0,1]$ dada por

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)dy$$

Probar que K es lineal y continua. Acotar su norma.

Ejercicio 16. Sea $f : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{R}$ dada por $f((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n$. Probar que f es lineal pero no es continua.

Ejercicio 17.

1. Sea $\phi \in C[0,1]$ y sea $T_\phi : C[0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

   $$T_\phi f = \int_0^1 f(x)\phi(x)dx$$

   Probar que T_ϕ es un funcional lineal continuo y que $\|T_\phi\| = \int_0^1 |\phi(x)|dx$

2. Sea $T : c \to \mathbb{R}$ dada por $T(a) = \text{lím}_{n\to\infty} a_n$. Probar que T es lineal, continuo y hallar $\|T\|$.

3. Dada $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty$, definimos $T_b : l^1 \to \mathbb{R}$ como $T_b(a) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n a_n$. Probar que T_b es lineal, continuo y hallar $\|T_b\|$.

Ejercicio 18. Sean S, T: $\ell^1 \to \ell^1$, definidos por

$$S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$$

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$$

Probar que S, $T \in \mathcal{L}(\ell^1)$ y calcular sus normas.

Ejercicio 19. Sean E un espacio normado, $S \subset E$ subespacio vectorial cerrado y $x_0 \notin S$. Probar que existe φ: $E \to \mathbb{R}$ lineal y continua tal que $\varphi|_S \equiv 0$; $\|\varphi\| = 1$ y $\varphi(x_0) = d(x_0, S)$.
Deducir que dados x e y existe φ: $E \to \mathbb{C}$ lineal y continua tal que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.