Práctica 9: Diferenciación

Ejercicio 1. Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en (a, b), derivable en $(a, b) - \{x_0\}$ y tal que los límites laterales de f' en x_0 existen y son finitos.

i) Probar que f es derivable lateralmente en x_0. Deducir que si ambos límites laterales coinciden, entonces f es derivable en x_0 y calcular $f'(x_0)$.

ii) Mostrar que los resultados de i) pierden validez si se omite hipótesis de continuidad de f en x_0.

Ejercicio 2. Sean $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ derivable en (α, β) y $\alpha < a < b < \beta$ tal que $f'(a) \neq f'(b)$.

a) Probar que si $f'(a) < 0 < f'(b)$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

b) Probar que si λ es un número real, $f'(a) < \lambda < f'(b)$, existe un $d \in (a, b)$ tal que $f'(d) = \lambda$.

c) Sea $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = \begin{cases} (t^2 \text{sen}\,(\frac{1}{t}), t^2 \cos\,(\frac{1}{t})) & \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ (0, 0) & \text{si} \quad -1 < t \leq 0 \end{cases}$. Probar que para todo $t \in (-1, 1)$ existe $g'(t)$ pero que $g'((-1, 1))$ no es conexo.

Ejercicio 3. Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en $x_0 \in (a, b)$. Sean $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (a, b)$ sucesiones que convergen a x_0 y tales que $\alpha_n < \beta_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define

$$D_n = \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}.$$

En cada uno de los siguientes casos, probar que $D_n \longrightarrow f'(x_0)$:

i) $\alpha_n < x_0 < \beta_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) $\left(\frac{\beta_n - x_0}{\beta_n - \alpha_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\left(\frac{\alpha_n - x_0}{\beta_n - \alpha_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ están acotadas.

iii) f es de clase C^1 en (a, b).

Dar un ejemplo de una función f derivable en $(-1, 1)$ con f' discontinua en 0 para la cual exista el límite de $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pero no sea $f'(0)$.

Ejercicio 4. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto conexo y sea $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación que satisface $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|^2$ para todo par de puntos $x, y \in U$. Probar que f es constante.

Ejercicio 5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Probar que existen las derivadas parciales de f en todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pero que f no es continua en $(0, 0)$.

Ejercicio 6.

i) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Probar que para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y para cada $v \in \mathbb{R}^2$, existe la derivada direccional $\frac{\partial f}{\partial v}(x,y)$, pero que la aplicación $v \mapsto \frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ no es lineal (y por lo tanto f no es diferenciable en el punto $(0,0)$).

ii) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Probar que para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y para cada $v \in \mathbb{R}^2$, existe la derivada direccional $\frac{\partial f}{\partial v}(x,y)$ y que la aplicación $v \mapsto \frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ es lineal, pero que f no es diferenciable en el punto $(0,0)$.

Ejercicio 7.

i) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable y tal que $f'(x) \neq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Probar que f tiene a lo sumo un punto fijo.

ii) Mostrar que si bien la función $f(x) = x + (1+e^x)^{-1}$ satisface $0 < f'(x) < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, no tiene ningún punto fijo.

iii) Explicar por qué esto no contradice el teorema del punto fijo.

Ejercicio 8. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función $f(x) = \frac{x^3+1}{3}$.

i) Verificar que f tiene tres puntos fijos α, β y γ que satisfacen

$$-2 < \alpha < -1 \quad , \quad 0 < \beta < 1 \quad , \quad 1 < \gamma < 2$$

ii) Si se escoge arbitrariamente $x_1 \in \mathbb{R}$ y se define la sucesión $x_{n+1} = f(x_n)$, probar que:

(a) Si $x_1 < \alpha$, entonces $x_n \longrightarrow -\infty$

(b) Si $\alpha < x_1 < \gamma$, entonces $x_n \longrightarrow \beta$

(c) Si $\gamma < x_1$, entonces $x_n \longrightarrow +\infty$

iii) Concluir que por este método sólo puede localizarse β.

Ejercicio 9. Dado $\alpha > 0$, se elige $x_1 > \sqrt{\alpha}$ y se define recursivamente la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\Big)$$

i) Demostrar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y que converge a $\sqrt{\alpha}$.

ii) Sea $\varepsilon_n = x_n - \sqrt{\alpha}$. Mostrar que $\varepsilon_{n+1} = \dfrac{\varepsilon_n^2}{2x_n} < \dfrac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{\alpha}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

iii) Deducir que $\varepsilon_{n+1} < \beta \left(\dfrac{\varepsilon_1}{\beta}\right)^{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $\beta = 2\sqrt{\alpha}$.

Ejercicio 10. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = \begin{cases} t + 2t^2 \mathrm{sen}\left(\frac{1}{t}\right) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Mostrar que $f'(0) = 1$ y f' es acotada en $(-1, 1)$, pero que sin embargo f no es biyectiva en ningún entorno de $t = 0$.
Deducir que la continuidad de f' en el punto es necesaria en el teorema de la función inversa, incluso en el caso $n = 1$.

Ejercicio 11. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \mathrm{sen}\, y)$.

i) Verificar que f no es inyectiva.

ii) Comprobar que el jacobiano de f es no nulo en todo punto de $\mathbb{R}^2$. Deducir que f es localmente inyectiva.

Ejercicio 12. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 con jacobiano no nulo en todo $x \in U$.

i) Probar que f es abierta.

ii) Probar que para cada $y \in \mathbb{R}^n$, $f^{-1}(y)$ es un conjunto discreto.

Ejercicio 13. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2 y + e^x + z$.

i) Comprobar que $f(0, 1, -1) = 0$ y $D_1 f(0, 1, -1) \neq 0$.

ii) Deducir la existencia de un entorno $U \subset \mathbb{R}^2$ de $(1, -1)$ y una función $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tal que $f(g(y, z), y, z) = 0$ para todo $(y, z) \in U$.

iii) Hallar la ecuación del plano tangente al gráfico de g en el punto $(1, -1, g(1, -1))$.

Ejercicio 14. Sea $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $(1, 2, 0)$ es solución de la ecuación $F(xz, y - 2x) = 0$.

i) Hallar condiciones suficientes para que existan un entorno $W \subset \mathbb{R}^2$ del punto $(1, 0)$ y una función $\varphi : W \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tales que $\varphi(1, 0) = 2$ y $F(x, z, \varphi(x, z) - 2x) = 0$ para todo $(x, z) \in W$.

ii) Probar que $x \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) - y \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = 2x$ para todo $(x, y) \in W$.

Ejercicio 15. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2 y + e^x + z$.

a) Comprobar que $f(0, 1, -1) = 0$ y $D_f(0, 1, -1) \neq 0$.

b) Deducir la existencia de un entorno $U \subset \mathbb{R}^2$ de $(1, -1)$ y una función $g : U \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que $f(g(y, z), y, z) = 0$ para todo $(y, z) \in U$.

c) Hallar la ecuación del plano tangente al gráfico de g en el punto $(1, -1, g(1, -1))$.

Ejercicio 16. Probar que la ecuación $x^2y - y^2x + z^2\cos(xz) = 1$ define una función implícita $z = z(x, y)$ en un entorno del punto $(0, \sqrt{2}, 1)$. Hallar el plano tangente a la superficie $z = z(x, y)$ en el punto $(0, \sqrt{2})$.

Ejercicio 17. Mostrar que el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + y - z + u^2 & = & 0 \\ x - y + 2z + u & = & 0 \\ 2x + 2y - 3z + 2u & = & 0 \end{cases}$$

puede resolverse para x, y, u en términos de z, para x, z, u en términos de y y para z, y, u en términos de x pero no para x, y, z en términos de u.

Ejercicio 18.

a) Probar que el sistema
$$\begin{cases} (x-2)^2 & = & 1 \\ e^{xy} + x^2 - z^2 & = & 1 \end{cases}$$
define dos funciones implícitas $y = y(x)$, $z = z(x)$ en un entorno del punto $(2, 0, 2)$.

b) Sea α la curva parametrizada por $\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$. Hallar el vector tangente a α en el punto $x = 2$.

c) Calcular la derivada direccional de la función $F(x, y, z) = \operatorname{sen}(xy) + z^2$ en el punto $(2, 0, 2)$ según la dirección del vector tangente a α en el punto $x = 2$.

Ejercicio 19.

a) Probar que el sistema
$$\begin{cases} x^2 + \operatorname{sen}(x) - y^2 + z^3 & = & 0 \\ -\ln(1+x) + y^2z & = & 0 \end{cases}$$
define dos funciones implícitas $y = y(x)$, $z = z(x)$ en un entorno del punto $(0, 1, 2)$. Sean $C \subset \mathbb{R}^2$ la curva que define el sistema de ecuaciones considerado, dada en forma paramétrica por $\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$ y la función $g(x, y, z) = 2xyz + z\tan(x)$. Calcular la derivada direccional de g en el punto $(0, 1, 1)$ según el vector tangente a α en el punto $x = 0$.