Práctica 1: Números Reales

Ejercicio 1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío acotado superiormente y sea $s \in \mathbb{R}$. Probar que

$$s = \sup A \iff \begin{array}{ll} i) & s \text{ es cota superior de } A \\ ii) & \forall \varepsilon > 0 \; \exists \, a \in A : s - \varepsilon < a \leq s \end{array}$$

Ejercicio 2. Para cada $x \in \mathbb{R}$ se define $A_x = \{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$.

i) Verificar que $A_x \neq \emptyset$ y es acotado superiormente. Concluir que existe el máximo de A_x. Este número se llama la *parte entera de* x y se notará $[x]$.

ii) Demostrar que:

(a) $0 \leq x - [x] < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

(b) $[x] = x \iff x \in \mathbb{Z}$

(c) $[x + y] \leq [x] + [y] + 1$

(d) $x < y \Rightarrow [x] \leq [y]$

Ejercicio 3.

i) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $y - x > 1$. Mostrar que existe un entero k tal que $x < k < y$.

ii) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Mostrar que existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.

iii) Sean $r, s \in \mathbb{Q}$ tales que $r > s$. Mostrar que existe un número irracional entre r y s.

iv) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Mostrar que existe un número irracional entre x e y.

Ejercicio 4.

i) Probar que para cada $x \in \mathbb{R}$, existe una sucesión $(q_n)_{n \in \mathsf{N}} \subset \mathbb{Q}$ estrictamente decreciente tal que $q_n \geq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n \to \infty} q_n = x$.

ii) Probar un enunciado análogo donde $(q_n)_{n \in \mathsf{N}}$ sea estrictamente creciente.

Ejercicio 5. Sean $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ y $\varepsilon > 0$. Mostrar que existe $q = (q_1, \ldots, q_m) \in \mathbb{Q}^m$ tal que $\|x - q\| = \Big(\sum\limits_{i=1}^{m} (x_i - q_i)^2\Big)^{1/2} < \varepsilon$.

Ejercicio 6. Sea $A = \left\{ \dfrac{m}{2^n} \Big/ m \in \mathbb{Z} \, , \; n \in \mathbb{N} \right\}$. Probar que A es denso en $\mathbb{R}$.
Analizar la misma situación para el conjunto $B = \left\{ \dfrac{m}{b^n} \Big/ m \in \mathbb{Z} \, , \; n \in \mathbb{N} \right\}$, donde $b \in \mathbb{R}_{>1}$.

Ejercicio 7. Sean $(a_n)_{n \in \mathsf{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathsf{N}}$ y $(c_n)_{n \in \mathsf{N}}$ sucesiones de números reales tales que

i) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_0,\ a_n \leq b_n \leq c_n$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \ell$

Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell$.

Ejercicio 8.

i) Sea $(a_n)_{n\in\mathsf{N}}$ una sucesión monótona. Probar que:

(a) Si existe una subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\mathsf{N}}$ convergente a $\ell \in \mathbb{R}$, entonces $(a_n)_{n\in\mathsf{N}}$ converge a ℓ. ¿Qué pasa si la subsucesión tiende a ∞?

(b) $(a_n)_{n\in\mathsf{N}}$ converge $\iff$ $(a_n)_{n\in\mathsf{N}}$ es acotada.

ii) Demostrar que cualquier subsucesión de una sucesión convergente es también convergente.

iii) Encontrar una sucesión **no** convergente $(a_n)_{n\in\mathsf{N}}$ que verifique $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - a_{n+1}| = 0$.

iv) Analizar la situación del inciso anterior pero con la condición: $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - a_{n+p}| = 0$ para todo $p \in \mathbb{N}$ y explicar por qué la respuesta no contradice ningún resultado conocido.

Ejercicio 9. Sea $(a_n)_{n\in\mathsf{N}}$ una sucesión acotada de números reales. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se considera $A_n = \{a_k : k \geq n\}$. Sean $\lambda_n = \sup A_n$ y $\gamma_n = \inf A_n$.

i) Probar que $(\lambda_n)_{n\in\mathsf{N}}$ es decreciente y $(\gamma_n)_{n\in\mathsf{N}}$ es creciente. Concluir que $(\lambda_n)_{n\in\mathsf{N}}$ y $(\gamma_n)_{n\in\mathsf{N}}$ son sucesiones convergentes. Al límite de la sucesión $(\lambda_n)_{n\in\mathsf{N}}$ (resp. $(\gamma_n)_{n\in\mathsf{N}}$) lo llamaremos *límite superior* (resp. *límite inferior*) de $(a_n)_{n\in\mathsf{N}}$ y lo notaremos $\limsup a_n$ (resp. $\liminf a_n$).

ii) Sean $\alpha = \liminf a_n$ y $\beta = \limsup a_n$, y sea $\varepsilon > 0$. Probar que a la derecha de $\beta + \varepsilon$ y a la izquierda de $\alpha - \varepsilon$ existen a lo sumo finitos términos de $(a_n)_{n\in\mathsf{N}}$.

Ejercicio 10. Hallar los límites superior e inferior de las siguientes sucesiones:

i) $1,\ 3,\ -1,\ 1,\ 3,\ -1,\ 1,\ 3,\ -1,\ \ldots$

ii) $(-1)^n\left(2 + \dfrac{3}{n}\right)$

iii) $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \operatorname{sen}\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$

iv) $(s_n)_{n\in\mathsf{N}}$ definida por: $s_1 = 0$, $s_{2n} = \dfrac{s_{2n-1}}{2}$, $s_{2n+1} = \dfrac{1}{2} + s_{2n}$

v) $\dfrac{n}{3} - \left[\dfrac{n}{3}\right]$

Ejercicio 11. Sea $(a_n)_{n\in\mathsf{N}}$ una sucesión de números reales acotada.

i) Probar que $\alpha = \limsup a_n$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ se verifica:

(a) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \geq n_0,\ a_n < \alpha + \varepsilon$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \geq n$ tal que $a_m > \alpha - \varepsilon$

ii) Demostrar que $\alpha = \limsup a_n$ si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes:

(a) Existe una subsucesión $(a_{n_j})_{j\in\mathsf{N}}$ tal que $\lim\limits_{j\to\infty} a_{n_j} = \alpha$.

(b) Si $(a_{n_j})_{j\in\mathsf{N}}$ es una subsucesión convergente, entonces $\lim\limits_{j\to\infty} a_{n_j} \leq \alpha$.

Ejercicio 12. Sea $(a_n)_{n\in\mathsf{N}} \subset \mathbb{R}$ acotada. Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ si y sólo si $\limsup a_n = \liminf a_n = \ell$.

Ejercicio 13. Sean $(a_n)_{n\in\mathsf{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathsf{N}}$ sucesiones reales acotadas. Probar que:

i) $\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$

ii) $\limsup(a_n \cdot b_n) \leq \limsup a_n \cdot \limsup b_n$, si $a_n, b_n \geq 0$

iii) si $c > 0$ entonces, $\limsup(c \cdot a_n) = c \cdot \limsup a_n$

Probar resultados análogos para $\liminf$.

Ejercicio 14. Sea $(a_n)_{n\in\mathsf{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$.

i) Probar que: $\liminf \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

ii) Deducir que si existe $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = A \in \mathbb{R}_\infty$ entonces, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A$.

iii) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

Ejercicio 15. Sean $x, y \in [0,1]$ dos números reales dados por sus desarrollos en base $b > 1$:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{b^i} \quad y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{b^i} \quad (0 \leq x_i, y_i < b - 1)$$

Se supone que el desarrollo de y es infinito, i.e. para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $i > n$ con $y_i > 0$.

1. Probar que si $x_i = y_i$ para todo $i \leq n-1$, y $x_n < y_n$ entonces $x < y$.

2. Deducir que el orden entre x e y es el mismo que el de los primeros términos en que difieren sus desarrollos.

3. Manteniendo las hipótesis de 1), sea $z \in [x, y]$. Probar que entonces z tiene un desarrollo en base b con $z_i = x_i = y_i$ para todo $i \leq n-1$.

Ejercicio 16. Hallar el desarrollo en base 2,3 y 16 de los números 2.25, 10.7, 27 y 255.