

PRÁCTICA 3: ESPACIOS MÉTRICOS

Ejercicio 1. Probar que toda colección de conjuntos abiertos disjuntos de \mathbb{R}^n es necesariamente a lo sumo numerable. Dar un ejemplo de colección de conjuntos cerrados disjuntos que no sea a lo sumo numerable.

Ejercicio 2. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un *punto de condensación* de S si toda n -bola $B(x)$ tiene la propiedad de que $B(x) \cap S$ es no numerable. Probar que si S es no numerable entonces existe un punto $x \in S$ de condensación de S .

Ejercicio 3. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$, probar que la colección de puntos aislados de S es a lo sumo numerable.

Ejercicio 4. Se definen las funciones $d_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq 5$) por:

$$d_1(x, y) = (x - y)^2 \quad , \quad d_2(x, y) = \sqrt{|x - y|} \quad , \quad d_3(x, y) = |x^2 - y^2|$$

$$d_4(x, y) = |x - 2y| \quad , \quad d_5(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$$

Determinar cuáles de estas funciones son métricas en \mathbb{R} .

Ejercicio 5.

i) Probar que las siguientes funciones son métricas en \mathbb{R}^n :

$$a) \quad d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

$$b) \quad d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

$$c) \quad d_\infty(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

ii) Para $n = 2$, dibujar las tres bolas abiertas $B(0, 1)$ de centro $0 \in \mathbb{R}^2$ y radio 1.

Ejercicio 6. Sea X un conjunto y $\delta : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Verificar que δ es una métrica y hallar los abiertos de (X, δ) .

NOTA: δ se llama *métrica discreta* y (X, δ) *espacio métrico discreto*.

Ejercicio 7. Sea $\ell^1 = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} / \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ es convergente}\}$. Se considera $d : \ell^1 \times \ell^1 \rightarrow \mathbb{R}$

definida por $d((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|$. Probar que (ℓ^1, d) es un espacio métrico.

Ejercicio 8. Sea $\ell^\infty = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} / (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es acotada}\}$. Se considera $d : \ell^\infty \times \ell^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $d((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n|$. Probar que (ℓ^∞, d) es un espacio métrico.

Ejercicio 9. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, se define $C[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ es continua}\}$. Probar que son espacios métricos:

- i) $(C[a, b], d_1)$, con $d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$
- ii) $(C[a, b], d_\infty)$, con $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$.

Ejercicio 10. Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) espacios métricos. Probar que las siguientes aplicaciones definen métricas en el conjunto $X_1 \times X_2$

- i) $d : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$.
- ii) $d_\infty : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d_\infty((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$.

Ejercicio 11.

- i) Sea (X, d) un espacio métrico. Se define $d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$. Probar que d' es una métrica en X topológicamente equivalente a d .
- ii) Sea $(X_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ vale $0 \leq d_n(x, y) \leq 1$ para todo par de elementos $x, y \in X_n$. Para cada $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definimos:

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}$$

Probar que d es una métrica en el espacio producto $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$.

- iii) Sea (X, d) un espacio métrico. Llamamos $X^{\mathbb{N}}$ al conjunto de las sucesiones de X . Mostrar que $X^{\mathbb{N}}$ es un espacio métrico con una distancia conveniente.

Ejercicio 12. Sean d_∞ y d_2 las métricas en \mathbb{R}^n definidas en el Ejercicio 5. Mostrar que un conjunto es abierto para d_∞ si y sólo si lo es para d_2 .

Ejercicio 13. Propiedades topológicas. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $A, B \subseteq X$

- i) Probar las siguientes propiedades del *interior* de un conjunto:

a) $A^\circ = \bigcup_{\substack{G \text{ abierto} \\ G \subseteq A}} G$

b) $\emptyset^\circ = \emptyset$ y $X^\circ = X$

c) $A \subseteq B \implies A^\circ \subseteq B^\circ$

d) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$. ¿Se puede generalizar a una intersección infinita?

e) $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$. ¿Vale la igualdad?

- ii) Probar las siguientes propiedades de la *clausura* de un conjunto:

a) $\bar{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ cerrado} \\ A \subseteq F}} F$

b) $\bar{\emptyset} = \emptyset$ y $\bar{X} = X$

c) $A \subseteq B \implies \bar{A} \subseteq \bar{B}$

d) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$. ¿Se puede generalizar a una unión infinita?

$$e) \overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$f) x \in \overline{A} \iff \text{Existe una sucesión } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A \text{ tal que } x_n \rightarrow x$$

iii) Probar las siguientes propiedades que relacionan interior y clausura:

$$a) (X - A)^\circ = X - \overline{A}$$

$$b) \overline{X - A} = X - A^\circ$$

¿Son ciertas las igualdades: $\overline{A} = \overline{A^\circ}$, $A^\circ = (\overline{A})^\circ$?

iv) Probar las siguientes propiedades de la *frontera* de un conjunto:

$$a) \partial A = \overline{A} \cap \overline{X - A}$$

$$b) \partial A \text{ es cerrado}$$

$$c) \partial A = \partial(X - A)$$

Ejercicio 14. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $G \subseteq X$ abierto y $F \subseteq X$ cerrado. Probar que $F - G$ es cerrado y $G - F$ es abierto.

Ejercicio 15. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $a \in X$ y $r \in \mathbb{R}_{>0}$, llamamos *bola cerrada de centro a y radio r* al conjunto $B[a, r] = \{x \in X / d(x, a) \leq r\}$.

i) Probar que $B[a, r]$ es un conjunto cerrado y que $\overline{B(a, r)} \subseteq B[a, r]$.

ii) Dar un ejemplo de un espacio métrico y una bola abierta $B(a, r)$ cuya clausura no sea $B[a, r]$.

Ejercicio 16. Sean (X, d_1) e (Y, d_2) espacios métricos. Se considera el espacio métrico $(X \times Y, d)$, donde d es la métrica definida en el Ejercicio 10. Probar que para $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ valen:

$$i) (A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$$

$$ii) \overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$$

Ejercicio 17. Sea (X, d) un espacio métrico y sean A, B subconjuntos de X .

i) Probar las siguientes propiedades del *derivado* de un conjunto:

$$a) A' \text{ es cerrado}$$

$$b) A \subseteq B \implies A' \subseteq B'$$

$$c) (A \cup B)' = A' \cup B'$$

$$d) \overline{A} = A \cup A'$$

$$e) (\overline{A})' = A'$$

ii) Probar que $x \in X$ es un punto de acumulación de $A \subseteq X$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \rightarrow x$ y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no es casi constante.

Ejercicio 18. Hallar interior, clausura, conjunto derivado y frontera de cada uno de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} . Determinar cuáles son abiertos o cerrados.

$$[0, 1] \quad ; \quad (0, 1) \quad ; \quad \mathbb{Q} \quad ; \quad \mathbb{Q} \cap [0, 1] \quad ; \quad \mathbb{Z} \quad ; \quad [0, 1) \cup \{2\}$$

Ejercicio 19. Sea \mathcal{C} el conjunto de Cantor.

1. Probar que \mathcal{C} es cerrado y acotado (luego compacto).
2. Probar que \mathcal{C} es perfecto (i.e. $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ y no vacío).
3. Probar que \mathcal{C} tiene interior vacío.
4. Probar que $x \in \mathcal{C}$ si y sólo si su desarrollo en base 3 tiene sólo las cifras 0 y 2.
5. Probar que \mathcal{C} tiene la potencia del continuo.

Ejercicio 20. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Probar que si $P \subseteq X$ es perfecto entonces es no numerable.

Ejercicio 21. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones en X .

- i) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$, probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$.
- ii) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son dos sucesiones de Cauchy en X , probar que la sucesión real $(d(x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente.

Ejercicio 22. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $A \subseteq X$ no vacío y $x \in X$, se define la *distancia de x a A* como $d(x, A) = \inf\{d(x, a) / a \in A\}$. Probar:

- i) $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ para todo par de elementos $x, y \in X$
- ii) $x \in A \implies d(x, A) = 0$
- iii) $d(x, A) = 0 \iff x \in \bar{A}$
- iv) $B(A, r) = \{x \in X / d(x, A) < r\}$ es abierto para todo $r > 0$
- v) $B[A, r] = \{x \in X / d(x, A) \leq r\}$ es cerrado para todo $r > 0$

Ejercicio 23. Un subconjunto A de un espacio métrico X se dice un G_δ (resp. un F_σ) si es intersección de una sucesión de abiertos (resp. unión de una sucesión de cerrados) de X .

- i) Probar que el complemento de un G_δ es un F_σ .
- ii) Probar que el complemento de un F_σ es un G_δ .
- ii) Probar que todo cerrado es un G_δ . Deducir que todo abierto es un F_σ .
- iv) a) Exhibir una sucesión de abiertos de \mathbb{R} cuya intersección sea $[0, 1)$. Idem con $[0, 1]$.
 b) Exhibir una sucesión de cerrados de \mathbb{R} cuya unión sea $[0, 1)$.
 ¿Qué conclusión saca de estos ejemplos?

Ejercicio 24. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $A, B \subseteq X$ no vacíos se define la *distancia entre A y B* por $d(A, B) = \inf\{d(a, b) / a \in A, b \in B\}$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- i) $d(A, B) = d(\bar{A}, B)$
- ii) $d(A, B) = 0 \iff A \cap B \neq \emptyset$
- iii) $d(A, B) = 0 \iff \bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$
- iv) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$