

## PRÁCTICA 5: ESPACIOS MÉTRICOS

**Ejercicio 1.** Sean  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  espacios métricos y sea  $f : X \rightarrow Y$ . Probar que:

- i)  $f$  es continua en  $x_0 \in X$  si y sólo si para toda sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  tal que  $x_n \rightarrow x_0$ , la sucesión  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$  converge a  $f(x_0)$ .
- ii) Son equivalentes:
  - (a)  $f$  es continua
  - (b) Para todo  $G \subset Y$  abierto,  $f^{-1}(G)$  es abierto en  $X$
  - (c) Para todo  $F \subset Y$  cerrado,  $f^{-1}(F)$  es cerrado en  $X$

**Ejercicio 2.** Sea  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  una función. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

- i) Si  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ , con cada  $U_i$  abierto y  $f|_{U_i}$  continua para todo  $i \in I$ , entonces  $f : X \rightarrow Y$  es continua.
- ii) Si  $X = \bigcup_{i \in I} F_i$ , con cada  $F_i$  cerrado y  $f|_{F_i}$  continua para todo  $i \in I$ , entonces  $f : X \rightarrow Y$  es continua.
- iii) Si  $X = \bigcup_{i=1}^m F_i$ , con cada  $F_i$  cerrado y  $f|_{F_i}$  continua para cada  $i = 1, \dots, m$ , entonces  $f : X \rightarrow Y$  es continua.
- iv) Si  $X = \bigcup_{i=1}^m X_i$  y  $f|_{X_i}$  continua para cada  $i = 1, \dots, m$ , entonces  $f : X \rightarrow Y$  es continua.

**Ejercicio 3.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Probar que  $f$  es continua si y sólo si para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , los conjuntos  $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$  y  $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$  son abiertos.

**Ejercicio 4.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $A$  un subconjunto de  $X$ . Probar que la función  $d_A : X \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $d_A(x) = d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$  es (uniformemente) continua.

**Ejercicio 5.** Decidir cuáles de las siguientes funciones son continuas:

- i)  $f : (\mathbb{R}^2, d) \rightarrow (\mathbb{R}, | \cdot |)$ ,  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , donde  $d$  representa la métrica euclídea.
- ii)  $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, \delta) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_\infty)$ , la función identidad, donde  $\delta$  representa la métrica discreta.
- iii)  $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, d_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \delta)$ , la función identidad, donde  $\delta$  representa la métrica discreta.
- iv)  $i : (E, d) \rightarrow (X, d)$ , la inclusión, donde  $E \subset X$

**Ejercicio 6.** Sean  $f, g, h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases} \quad g(x) = x \cdot f(x) \quad h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{m}{n}, (m : n) = 1, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Probar que:

- i)  $f$  es discontinua en todo punto
- ii)  $g$  sólo es continua en  $x = 0$
- iii)  $h$  es continua en  $[0, 1] - \mathbb{Q}$

**Ejercicio 7.** Métricas topológicamente equivalentes:

- i) Supongamos que existen constantes  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$  tales que

$$d_1(x, y) \leq c_1 d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y), \text{ para todo } x, y \in X.$$

Probar que  $d_1$  y  $d_2$  son topológicamente equivalentes.

- ii) Probar que  $d_1$  y  $d_2$  son topológicamente equivalentes si y sólo si la función identidad  $id_X : (X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$  es un homeomorfismo.
- iii) Consideramos en  $\mathbb{R}$  la métrica  $d'(x, y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|$ .

Probar que  $(\mathbb{R}, d')$  es topológicamente equivalente a  $\mathbb{R}$  con la métrica usual  $d(x, y) = |x - y|$ , pero que  $(\mathbb{R}, d')$  no es completo.

**Ejercicio 8.** Considerando en cada  $\mathbb{R}^n$  la métrica euclídea, probar que:

- i)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y \operatorname{sen}(e^x - 1) = -2\}$  es cerrado.
- ii)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -1 \leq x^3 - 3y^4 + z - 2 \leq 3\}$  es cerrado.
- iii)  $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 / 3 < x_1 - x_2\}$  es abierto.

Mencione otras dos métricas para las cuales siguen valiendo estas afirmaciones.

**Ejercicio 9.** Consideramos las funciones  $E, I : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por:

$$E(f) = f(0) \text{ y } I(f) = \int_0^1 f(x) dx$$

1. Demostrar que si utilizamos en  $C([0, 1])$ , la distancia  $d_\infty$  ambas resultan continuas.
2. Demostrar que si, en cambio, utilizamos en  $C([0, 1])$  la distancia  $d_1$ ,  $I$  es una función continua pero  $E$  no lo es.
3. Analizar si es posible que una función  $F : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$  sea continua para la distancia  $d_1$  pero no para  $d_\infty$  ?

**Ejercicio 10.** Sean  $X, Y$  espacios métricos y sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua. Probar que el gráfico de  $f$ , definido por

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$$

es cerrado en  $X \times Y$  con la métrica  $d_\infty$ . ¿Es cierta la afirmación recíproca?

**Ejercicio 11.** Teorema de Urysohn.

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sean  $A, B$  cerrados disjuntos de  $X$ .

- i) Probar que existe una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que:

$$f|_A \equiv 0 \quad , \quad f|_B \equiv 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in X$$

*Sugerencia:* Considerar la función  $f(x) = \frac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)}$ .

ii) Deducir que existen abiertos  $U, V \subset X$  disjuntos tales que  $A \subset U$  y  $B \subset V$ .

**Ejercicio 12.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y sea  $\Delta : X \longrightarrow X \times X$  la aplicación diagonal definida por  $\Delta(x) = (x, x)$ . Probar que:

i)  $\Delta$  es un homeomorfismo entre  $X$  y  $\{(x, x) : x \in X\} \subset X \times X$ .

ii)  $\Delta(X)$  es cerrado en  $X \times X$ .

**Ejercicio 13.** Sean  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  espacios métricos. Una aplicación  $f : X \longrightarrow Y$  se dice *abierto* si  $f(A)$  es abierto para todo abierto  $A \subset X$  y se dice *cerrada* si  $f(F)$  es cerrado para todo cerrado  $F \subset X$ .

i) Probar que si  $f$  es biyectiva entonces,  $f$  es abierta (cerrada) si y sólo si  $f^{-1}$  es continua.

ii) Dar un ejemplo de una función de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  continua que no sea abierta.

iii) Dar un ejemplo de una función de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  continua que no sea cerrada.

iv) Mostrar con un ejemplo que una función puede ser biyectiva, abierta y cerrada pero no continua.

**Ejercicio 14.** Sean  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  espacios métricos y sea  $f : X \longrightarrow Y$  una función.

i) Probar que  $f$  es continua si y sólo si  $f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$  para todo subconjunto  $E \subset X$ .

Mostrar con un ejemplo que la inclusión puede ser estricta.

ii) Probar que  $f$  es continua y cerrada si y sólo si  $f(\overline{E}) = \overline{f(E)}$  para todo subconjunto  $E \subset X$ .

**Ejercicio 15.**

i) Sean  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  espacios métricos y sea  $D \subset X$  denso. Sean  $f, g : X \longrightarrow Y$  funciones continuas. Probar que si  $f|_D = g|_D$ , entonces  $f = g$ .

ii) Sea  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  para todo  $x, y \in \mathbb{Q}$ . Probar que existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \alpha x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 16.** Sean  $X, Y$  espacios métricos. Sea  $f : X \longrightarrow Y$  una función continua y suryectiva.

i) Probar que si  $X$  es separable, entonces  $Y$  es separable.

ii) ¿Es cierto que si  $X$  es completo, entonces  $Y$  es completo?

**Ejercicio 17.** Sean  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  espacios métricos. Consideramos en  $X \times Y$  la métrica  $d_\infty$ .

i) Probar que las proyecciones  $\pi_1 : X \times Y \longrightarrow X$  y  $\pi_2 : X \times Y \longrightarrow Y$  son continuas y abiertas.

Mostrar con un ejemplo que pueden no ser cerradas.

ii) Sea  $(Z, \delta)$  un espacio métrico y sea  $f : Z \longrightarrow X \times Y$  una aplicación. Probar que  $f$  es continua si y sólo si  $f_1 = \pi_1 \circ f$  y  $f_2 = \pi_2 \circ f$  lo son.

**Ejercicio 18.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$  una función. Se dice que  $f$  es *semicontinua inferiormente* (resp. *superiormente*) en  $x_0 \in X$  si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$d(x, x_0) < \delta \implies f(x_0) < f(x) + \varepsilon \quad (\text{resp. } f(x_0) + \varepsilon > f(x))$$

Probar que:

- i)  $f$  es continua en  $x_0$  si y sólo si  $f$  es semicontinua inferiormente y superiormente en  $x_0$ .
- ii)  $f$  es semicontinua inferiormente si y sólo si  $f^{-1}(\alpha, +\infty)$  es abierto para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- iii)  $f$  es semicontinua superiormente si y sólo si  $f^{-1}(-\infty, \alpha)$  es abierto para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- iv) si  $A \subset X$  es un abierto  $\mathcal{X}_A$  es semicontinua inferiormente y si  $F \subset X$  es un cerrado  $\mathcal{X}_F$  es semicontinua superiormente.

**Ejercicio 19.**

- i) Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Probar que el conjunto  $\{0\} \cup \{a_n / n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$  es compacto.
- ii) Sea  $S = (a, b) \cap \mathbb{Q}$  con  $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ . Probar que  $S$  es un subconjunto cerrado y acotado pero no compacto de  $(\mathbb{Q}, d)$ , donde  $d$  es la métrica euclídea de  $\mathbb{R}$ .

**Ejercicio 20.** Sea  $K \subset \mathbb{R}$  compacto. Probar que  $K$  tiene mínimo y máximo.

**Ejercicio 21.** Sea  $A = \{a^{(n)} \in \ell^\infty / n \in \mathbb{N}\}$ , donde cada sucesión  $a^{(n)} = (a_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}}$  está definida por

$$a_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 1 & \text{si } k = n \end{cases}$$

Probar que  $A$  es discreto, cerrado y acotado, pero no compacto.

**Ejercicio 22.** Dado un cubrimiento por abiertos  $(U_i)_{i \in I}$  de un espacio métrico  $(X, d)$ , un número  $\varepsilon > 0$  se llama *número de Lebesgue* de  $(U_i)_{i \in I}$  si para todo  $x \in X$  existe  $j \in I$  tal que  $B(x, \varepsilon) \subset U_j$ . Probar que todo cubrimiento por abiertos de un espacio métrico compacto tiene un número de Lebesgue.

**Ejercicio 23.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Probar que:

- i) Toda unión finita y toda intersección (finita o infinita) de subconjuntos compactos de  $X$  es compacta.
- ii) Si  $(X, d)$  es compacto, todo subconjunto cerrado de  $X$  es compacto.
- iii) Un subconjunto  $F \subset X$  es cerrado si y sólo si  $F \cap K$  es cerrado para todo compacto  $K \subset X$ .

**Ejercicio 24.** Sea  $c_0 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} / \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$ . Se define en  $c_0$  la métrica

$$d(x, y) = \sup\{|x_n - y_n| / n \in \mathbb{N}\}$$

- i) Demostrar que para cada  $x \in c_0$  la bola cerrada  $B[x, 1] = \{y \in c_0 / d(x, y) \leq 1\}$  no es compacta.
- ii) Probar que  $(c_0, d)$  es separable.

**Ejercicio 25.** Sean  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  espacios métricos. Probar que  $(X \times Y, d_\infty)$  es compacto si y sólo si  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  lo son.

**Ejercicio 26.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico.

- i) Sean  $K \subset X$  un compacto y sea  $x \in X - K$ . Probar que existe  $y \in K$  tal que  $d(x, K) = d(x, y)$ ; es decir, la distancia entre  $x$  y  $K$  'se realiza'.
- ii) Sean  $F, K \subset X$  dos subconjuntos disjuntos de  $X$  tales que  $F$  es cerrado y  $K$  es compacto. Probar que la distancia  $d(F, K)$  entre  $F$  y  $K$  es positiva.
- iii) Sean  $K_1, K_2 \subset X$  dos subconjuntos compactos de  $X$  tales que  $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ . Probar que existen  $x_1 \in K_1$  y  $x_2 \in K_2$  tales que  $d(K_1, K_2) = d(x_1, x_2)$ ; es decir, la distancia entre  $K_1$  y  $K_2$  'se realiza'.

**Ejercicio 27.** Sean  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  espacios métricos y  $f : X \rightarrow Y$  continua y biyectiva. Probar que si  $(X, d)$  es compacto, entonces  $f$  es un homeomorfismo.

**Ejercicio 28.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico compacto. Probar que para cada espacio métrico  $(Y, d')$ , la proyección  $\pi : X \times Y \rightarrow Y$  definida por  $\pi(x, y) = y$  es cerrada si en  $X \times Y$  se considera la métrica  $d_\infty$ .

**Ejercicio 29.** Sean  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  espacios métricos, y sea  $f : X \rightarrow Y$  una función. Probar que si  $Y$  es compacto y el gráfico de  $f$  es cerrado en  $(X \times Y, d_\infty)$ , entonces  $f$  es continua.