

PRÁCTICA 6: ESPACIOS MÉTRICOS

Ejercicio 1.

- i) Sea $f : \mathbb{R}_{\geq a} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que es uniformemente continua en $[a, b]$ y también en $[b, +\infty)$. Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geq a}$.
- ii) Deducir que \sqrt{x} es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geq 0}$.
- iii) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Probar que f es uniformemente continua en \mathbb{R} .

Ejercicio 2. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subset X$ compacto. Probar que si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $f(x) > 0$ para todo $x \in A$, entonces existe $K > 0$ tal que $f(x) \geq K$ para todo $x \in A$.

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y abierta.

- i) Probar que f no tiene extremos locales; es decir, no existen $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $f(x_0) \leq f(x)$ (resp. $f(x_0) \geq f(x)$) para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$
- ii) Comprobar que existen $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tales que $f(\mathbb{R}) = (a, b)$.
- iii) Mostrar que $f : \mathbb{R} \rightarrow (a, b)$ es un homeomorfismo y que ella y su inversa son funciones monótonas.

Ejercicio 4. Sea (X, d) un espacio métrico compacto y sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función semicontinua superiormente. Probar que f está acotada superiormente en X y que f alcanza máximo en X .

Ejercicio 5. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y sea $f : X \rightarrow Y$ una función que satisfice:

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq c d(x_1, x_2)$$

para todo $x_1, x_2 \in X$, donde $c \geq 0$. Probar que f es uniformemente continua.

Ejercicio 6.

- i) Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos, $A \subseteq X$ y $f : X \rightarrow Y$ una función. Probar que si existen $\alpha > 0$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ sucesiones y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$(a) \quad d(x_n, y_n) \rightarrow 0 \quad \text{para } n \rightarrow \infty$$

$$(b) \quad d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \alpha \quad \text{para todo } n \geq n_0$$

entonces f no es uniformemente continua en A .

- ii) Verificar que la función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en \mathbb{R} . ¿Y en $\mathbb{R}_{\leq -\pi}$?
- iii) Verificar que la función $f(x) = \text{sen}(1/x)$ no es uniformemente continua en $(0, 1)$.

Ejercicio 7.

- i) Sea $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ una función uniformemente continua y sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X . Probar que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y .

- ii) Sea $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ un homeomorfismo uniforme. Probar que (X, d) es completo si y sólo si (Y, d') es completo.

En particular, si un espacio métrico X es completo para una métrica lo es para cualquier otra métrica uniformemente equivalente.

Ejercicio 8.

- i) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y continua pero no uniformemente continua.
ii) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no acotada y uniformemente continua.

Ejercicio 9. Sea $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ una función uniformemente continua, y sean $A, B \subset X$ conjuntos no vacíos tales que $d(A, B) = 0$. Probar que $d'(f(A), f(B)) = 0$.

Ejercicio 10. Sean X e Y espacios métricos, Y completo. Sea $D \subset X$ denso y sea $f : D \rightarrow Y$ una función uniformemente continua. Probar que f tiene una única extensión continua a todo X , es decir, existe una única función $F : X \rightarrow Y$ continua tal que $F|_D = f$. (Más aún, F es uniformemente continua).

Ejercicio 11. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son conexos:

$$\{x \in \mathbb{R}^2 / 0 < |x| < 2\}, \quad \mathbb{N}, \quad [0, 1), \quad \mathbb{Q}, \quad \{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\}$$

$B(a, \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) en un espacio métrico (X, d) .

Ejercicio 12. Dar ejemplos de conjuntos conexos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ tales que $A \cap B$ no sea conexo. Idem para $A \setminus B$.

Ejercicio 13. Sean X un espacio métrico y $C \subset X$

- i) Probar que si C es conexo y x es un punto de acumulación de C entonces $C \cup \{x\}$ es conexo.
ii) Determinar la validez de las siguientes afirmaciones:
(a) Si C es conexo, entonces C° es conexo.
(b) Si C es conexo, entonces \overline{C} es conexo.

Ejercicio 14. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $C \subset X$. Probar que son equivalentes:

- i) C es conexo.
ii) No existen \mathcal{U}, \mathcal{V} abiertos en X y disjuntos, de modo que $C \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, $C \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ y $C \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$.
iii) Si $A \subset C$ es no vacío y abierto y cerrado en C , entonces $A = C$.
iv) Toda función $f : C \rightarrow \{0, 1\}$ continua es constante.

Ejercicio 15. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ continua. Probar que f es constante.

Ejercicio 16. Probar que si $n \geq 2$ no existe un homeomorfismo entre \mathbb{R} y \mathbb{R}^n .

Ejercicio 17.

- i) Probar que si $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es continua, existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = x_0$.
ii) Sea (X, d) un espacio métrico conexo y sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Sean $a, b \in f(X)$ tales que $a \leq b$. Probar que para todo $c \in [a, b]$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = c$.

Ejercicio 18. Hallar las componentes conexas de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} y de \mathbb{R}^2

i) $\arcsen([\frac{\sqrt{2}}{2}, 1])$

iii) $B((-1, 0), 1) \cup B((1, 0), 1)$

ii) \mathbb{Q}

iv) $B((-1, 0), 1) \cup B((1, 0), 1) \cup \{(0, 0)\}$

Ejercicio 19. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]$, y sea $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \cup \{(0, 0), (0, 1)\}$. Probar que:

i) $\{(0, 0)\}$ y $\{(0, 1)\}$ son componentes conexas de X

ii) Si $B \subset X$ es abierto y cerrado en X , entonces $\{(0, 0), (0, 1)\} \subset B$ ó $\{(0, 0), (0, 1)\} \cap B = \emptyset$.

Ejercicio 20. Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que las componentes conexas de X son conjuntos cerrados.

Ejercicio 21. Sea (X, d) un espacio métrico. Un conjunto $A \subset X$ se dice *arcoconexo* (o *conexo por arcos*) si para todo par de puntos $a, b \in A$ existe una función continua $f : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$.

i) Probar que todo conjunto arcoconexo es conexo.

ii) Exhibir un ejemplo de un conjunto conexo que no sea arcoconexo.

Ejercicio 22. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son arcoconexos:

i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = f(x, y)\}$ donde $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua.

ii) $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B(0, 1)$

iii) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) / x \in \mathbb{R}\}$

iv) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

Ejercicio 23. Sean (X, d) un espacio métrico arcoconexo, (Y, d') un espacio métrico y $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Probar que el conjunto $f(X)$ es arcoconexo.

Ejercicio 24. En el espacio $(C[0, 1], d_\infty)$ se considera el conjunto

$$U = \{f \in C[0, 1] : f(x) \neq 0 \forall x \in [0, 1]\}$$

Probar que U es abierto y hallar sus componentes conexas.