

## PRÁCTICA 8: ESPACIOS NORMADOS II

**Ejercicio 1.** Demostrar que si una función  $f \in C[a, b]$  continua, satisface que,  $\forall k \geq 0$ ,  $M_k(f) := \int_a^b x^k f(x) dx = 0$ , entonces  $f \equiv 0$ . Deducir que si  $f, g \in C[a, b]$ ,  $f \equiv g$  si y sólo si  $M_k(f) = M_k(g)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

**Ejercicio 2.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios métricos compactos y sea  $F \in C(X \times Y)$  una función continua. Probar que  $F$  puede ser aproximada uniformemente por funciones de la forma  $\sum_{k=1}^n f_k g_k$  donde, para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f_k \in C(X)$  y  $g_k \in C(Y)$

**Ejercicio 3.** Sea  $X$  un espacio métrico compacto. Demostrar que una condición necesaria para que una familia  $\mathcal{F} \subset (C(X), \|\cdot\|_\infty)$  sea densa es que  $\mathcal{F}$  separe puntos. Concluir que la familia de polinomios que tienen todos sus términos de grado par no puede ser densa en  $C[-1, 1]$  ¿y en  $C[0, 1]$ ?

**Ejercicio 4.** Sea  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ . Se sabe que para cada  $(x, y) \in S^1$  existe un único  $\theta \in [0, 2\pi)$  tal que  $(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$ . Una función continua  $P : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  es un *polinomio trigonométrico* si, para todo  $\theta \in [0, 2\pi)$  existen  $a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$  tales que

$$P(\cos \theta, \sin \theta) = a_0 + (a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta) + \dots + (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

Probar que toda función  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  continua puede ser aproximada por polinomios trigonométricos.

**Ejercicio 5.** Sea  $f \in C^1[a, b]$ . Si  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de polinomios que converge uniformemente a  $f'$  en  $[a, b]$  entonces  $p_n(x) := f(a) + \int_a^x q_n(t) dt$  define una sucesión de polinomios  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tales que  $p_n$  converge a  $f$  y  $p'_n$  converge a  $f'$  uniformemente en  $[a, b]$ .

**Ejercicio 6.** Sea  $X \subset \mathbb{C}^n$  compacto. Probar que toda función continua  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  puede ser aproximada uniformemente por polinomios en las variables  $z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$ .

**Ejercicio 7.** Sean  $(X, \|\cdot\|_X)$  e  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  espacios normados y  $B(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y : \sup_{x \in X} \|f(x)\|_Y < \infty\}$ . Probar que si  $A \subset B(X, Y)$  es equicontinuo entonces  $\bar{A}$  también.

**Ejercicio 8.** Sean  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrables y uniformemente acotadas. Se define

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt \quad (a \leq x \leq b)$$

Probar que existe una subsucesión  $(F_{n_k})$  que converge uniformemente sobre  $[a, b]$ .

**Ejercicio 9.** Sea  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de funciones  $f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1-nx)^2}$ . Probar que

1.  $\{f_n\}$  es uniformemente acotada en  $[0, 1]$ .
2. existe el límite puntual de  $\{f_n\}$  en  $[0, 1]$ .
3. ninguna subsucesión de  $\{f_n\}$  converge uniformemente en  $[0, 1]$ .

**Ejercicio 10.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio normado de dimensión  $n$  y sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow E$  un isomorfismo algebraico. Consideramos en  $\mathbb{R}^n$  la norma  $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

1. Probar que  $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty = 1\}$  es compacto en  $\mathbb{R}^n$
2. Probar que existen  $c_1, c_2 > 0$  tales que para todo  $x \in \mathbb{R}^n : c_1 \|x\|_\infty \leq \|f(x)\|_E \leq c_2 \|x\|_\infty$
3. Deducir que si  $N_1, N_2$  son dos normas en  $\mathbb{R}^n$ , entonces existen constantes  $a, b > 0$  tales que para todo  $x \in \mathbb{R}^n : aN_1(x) \leq N_2(x) \leq bN_1(x)$  (esto es: son equivalentes)

**Ejercicio 11.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio normado y  $S \subset E$  un subespacio (vectorial). Probar que:

1.  $\bar{S}$  también es un subespacio.
2. Si  $S \neq E$ , entonces  $S^\circ = \emptyset$ .
3. Si  $\dim(S) < \infty$ , entonces  $S$  es cerrado
4. Si  $S$  es un hiperplano, entonces  $S$  es o bien denso o bien cerrado en  $E$ .

**Ejercicio 12.** Para cada uno de los siguientes ejemplos de subespacios decidir si son cerrados, si son densos y si son hiperplanos.

1.  $c = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n\} \subset l^\infty$
2.  $c_0 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \rightarrow 0\} \subset c$
3.  $\mathbb{R}[X]$  (polinomios en una variable)  $\subset C[0, 1]$
4.  $C^1[a, b] \subset C[a, b]$

**Ejercicio 13.** Sean  $E$  y  $F$  espacios normados. Sea  $T : E \rightarrow F$  una operador lineal. Probar que son equivalentes:

1.  $T$  es continuo en 0.
2.  $\exists x_0 \in E$  tal que  $T$  es continuo en  $x_0$ .
3.  $T$  es continuo.
4.  $T$  es uniformemente continuo.
5.  $\exists M > 0 / \forall x \in E : \|Tx\| \leq M\|x\|$ . ( $T$  es acotada)
6.  $\forall A \subset E$  acotado,  $T(A)$  es acotado.

**Ejercicio 14.** Sean  $E$  y  $F$  espacios normados y sea  $T : E \rightarrow F$  un operador lineal y continuo. Verificar las siguientes fórmulas:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|<1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \inf\{M / \|Tx\| \leq M\|x\|\}$$

**Ejercicio 15.** Sea  $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y sea  $K : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  dada por

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x, y)f(y)dy$$

Probar que  $K$  es lineal y continua. Acotar su norma.

**Ejercicio 16.** Sea  $f : (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \|\cdot\|_{\infty}) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n$ . Probar que  $f$  es lineal pero no es continua.

**Ejercicio 17.**

1. Sea  $\phi \in C[0, 1]$  y sea  $T_{\phi} : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$T_{\phi}f = \int_0^1 f(x)\phi(x)dx$$

Probar que  $T_{\phi}$  es un funcional lineal continuo y que  $\|T_{\phi}\| = \int_0^1 |\phi(x)|dx$

2. Sea  $T : c \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $T(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Probar que  $T$  es lineal, continuo y hallar  $\|T\|$ .
3. Dada  $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^{\infty}$ , definimos  $T_b : l^1 \rightarrow \mathbb{R}$  como  $T_b(a) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n$ . Probar que  $T_b$  es lineal, continuo y hallar  $\|T_b\|$ .

**Ejercicio 18.** Sean  $S, T : \ell^1 \rightarrow \ell^1$ , definidos por

$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$$

Probar que  $S, T \in \mathcal{L}(\ell^1)$  y calcular sus normas.