PRÁCTICA 3: ESPACIOS MÉTRICOS

Thought is only a flash between two long nights, but this flash is everything. HENRI POINCARE (1854 - 1912).

I would never die for my beliefs because I might be wrong. BERTRAND RUSSELL (1872 - 1970)

Métricas en $\mathbb{R}^n$

Ejercicio 1. Probar que toda colección de conjuntos abiertos disjuntos de $\mathbb{R}^n$ es a lo sumo numerable. Dar un ejemplo de colección de conjuntos cerrados disjuntos que no sea a lo sumo numerable.

Ejercicio 2. Sea G la colección de todas las bolas $B(q,r)$ de $\mathbb{R}^n$con centro $q \in \mathbb{Q}^n$ y radio racional r. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $x \in S$. Probar que $\exists\ B_k \in G$ tal que $x \in B_k \subseteq S$.

Ejercicio 3. *Teorema de Lindelöf.* Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $C = (W_i)_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de A. Probar que existe un subcubrimiento numerable de C que cubre a A.

Ejercicio 4. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un *punto de condensación* de S si toda n-bola $B(x)$ tiene la propiedad de que $B(x) \cap S$ es no numerable. Probar que si S es no numerable entonces existe un punto $x \in S$ de condensación de S.

Ejercicio 5. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$, probar que la colección de puntos aislados de S es a lo sumo numerable.

Ejercicio 6. Se definen las funciones $d_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq 5)$ por:

$$d_1(x,y) = (x-y)^2 \quad , \quad d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|} \quad , \quad d_3(x,y) = |x^2 - y^2|$$

$$d_4(x,y) = |x - 2y| \quad , \quad d_5(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$

Determinar cuáles de estas funciones son métricas en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 7.

i) Probar que las siguientes funciones son métricas en $\mathbb{R}^n$:

a) $d_1(x,y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

b) $d_2(x,y) = \Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\Big)^{1/2}$

c) $d_\infty(x,y) = \displaystyle\sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$

ii) Para $n = 2$, dibujar las tres bolas abiertas $B(0,1)$ de centro $0 \in \mathbb{R}^2$ y radio 1.

Ejercicio 8. Sean $p, p' \in \mathbb{R}$, tales que $1 < p, p' < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

i) (Desigualdad de Young) Probar si $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'}$$

ii) (Desigualdad de Hölder)

Probar que si $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^{p'}\right)^{1/p'}$$

Sugerencia: reducirla al caso $\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^{p'}\right)^{1/p'} = 1$.

iii) (Desigualdad de Minkowski) Si $x, y \in R^n$ entonces:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}$$

Sugerencia: utilizar la desigualdad de Hölder.

iv) Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, se define $d_p(x, y) := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}$. Probar que d_p es una distancia en $\mathbb{R}^n$.

Espacios Métricos

Ejercicio 9. Sea X un conjunto y $\delta : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Verificar que δ es una métrica y hallar los abiertos de (X, δ).

Nota: δ se llama *métrica discreta* y (X, δ) *espacio métrico discreto.*

Ejercicio 10. Sea $\ell^1 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \;/\; \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ es convergente}\}$. Se considera $d : \ell^1 \times \ell^1 \to \mathbb{R}$ definida por $d((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|$. Probar que (ℓ^1, d) es un espacio métrico.

Ejercicio 11. Sea $\ell^\infty = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \;/\; (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es acotada}\}$. Se considera $d : \ell^\infty \times \ell^\infty \to \mathbb{R}$ definida por $d((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|$. Probar que (ℓ^∞, d) es un espacio métrico.

Ejercicio 12. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, se define $C[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \;/\; f \text{ es continua }\}$. Probar que los siguientes son espacios métricos:

i) $(C[a, b], d_1)$, con $d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$

ii) $(C[a, b], d_\infty)$, con $d_\infty(f, g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$.

Ejercicio 13. Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) espacios métricos. Probar que las siguientes aplicaciones definen métricas en el conjunto $X_1 \times X_2$

i) $d : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$.

ii) $d_\infty : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d_\infty((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \text{máx}\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$.

Ejercicio 14.

i) Sea (X, d) un espacio métrico. Se define $d'(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$. Probar que d' es una métrica en X topológicamente equivalente a d, i.e. un conjunto es abierto para d' si y sólo si lo es para d. Observar que $0 \leq d'(x, y) < 1$ para todo $x, y \in X$.

ii) Sea $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ vale $0 \leq d_n(x, y) \leq 1$ para todo par de elementos $x, y \in X_n$. Para cada $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definimos:

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}$$

Probar que d es una métrica en el espacio producto $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$.

iii) Sea (X, d) un espacio métrico. Llamamos $X^{\mathbb{N}}$ al conjunto de las sucesiones de X. Mostrar que existe una distancia que hace de $X^{\mathbb{N}}$ un espacio métrico.

Ejercicio 15. Mostrar que las métricas d_∞ y d_2, definidas en el Ejercicio 5, son topológicamente equivalentes.

Propiedades topológicas

Ejercicio 16. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $A, B \subseteq X$

i) Probar las siguientes propiedades del *interior* de un conjunto:

a) $A^\circ = \bigcup_{\substack{G \text{ abierto} \\ G \subseteq A}} G$

b) $\emptyset^\circ = \emptyset$ y $X^\circ = X$

c) $A \subseteq B \implies A^\circ \subseteq B^\circ$

d) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$. ¿Se puede generalizar a una intersección infinita?

e) $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$. ¿Vale la igualdad?

ii) Probar las siguientes propiedades de la *clausura* de un conjunto:

a) $\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ cerrado} \\ A \subseteq F}} F$

b) $\overline{\emptyset} = \emptyset$ y $\overline{X} = X$

c) $A \subseteq B \implies \overline{A} \subseteq \overline{B}$

d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. ¿Se puede generalizar a una unión infinita?

e) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

f) $x \in \overline{A} \iff$ Existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \longrightarrow x$

iii) Probar las siguientes propiedades que relacionan interior y clausura:

a) $(X - A)^\circ = X - \overline{A}$

b) $\overline{X - A} = X - A^\circ$

¿Son ciertas las igualdades: $\overline{A} = \overline{A^\circ}$, $A^\circ = (\overline{A})^\circ$?

iv) Probar las siguientes propiedades de la *frontera* de un conjunto:

a) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X - A}$

b) ∂A es cerrado

c) $\partial A = \partial(X - A)$

Ejercicio 17. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $G \subseteq X$ abierto y $F \subseteq X$ cerrado. Probar que $F - G$ es cerrado y $G - F$ es abierto.

Ejercicio 18. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $a \in X$ y $r \in \mathbb{R}_{>0}$, llamamos *bola cerrada de centro a y radio r* al conjunto $B[a, r] = \{x \in X \ / \ d(x, a) \leq r\}$.

i) Probar que $B[a, r]$ es un conjunto cerrado y que $\overline{B(a, r)} \subseteq B[a, r]$.

ii) Dar un ejemplo de un espacio métrico y una bola abierta $B(a, r)$ cuya clausura no sea $B[a, r]$.

Ejercicio 19. Sean (X, d_1) e (Y, d_2) espacios métricos. Se considera el espacio métrico $(X \times Y, d)$, donde d es la métrica definida en el item i) del Ejercicio 11. Probar que para $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ valen:

i) $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$

ii) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$

Ejercicio 20. Sea (X, d) un espacio métrico y sean A, B subconjuntos de X.

i) Probar las siguientes propiedades del *derivado* de un conjunto:

a) A' es cerrado

b) $A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad A' \subseteq B'$

c) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

d) $\overline{A} = A \cup A'$

e) $(\overline{A})' = A'$

ii) Probar que $x \in X$ es un punto de acumulación de $A \subseteq X$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \longrightarrow x$ y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no es casi constante.

Ejercicio 21. Hallar interior, clausura, conjunto derivado y frontera de cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$. Determinar cuáles son abiertos o cerrados.

$$[0, 1] \quad ; \quad (0, 1) \quad ; \quad \mathbb{Q} \quad ; \quad \mathbb{Q} \cap [0, 1] \quad ; \quad \mathbb{Z} \quad ; \quad [0, 1) \cup \{2\}$$

Ejercicio 22. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor. Probar las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{C}$ es cerrado y acotado (luego compacto).

2. $\mathcal{C}$ es perfecto (i.e. $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ y no vacío).

3. $\mathcal{C}$ tiene interior vacío.

4. $x \in \mathcal{C}$ si y sólo si su desarrollo en base 3 tiene sólo las cifras 0 y 2.

5. $\mathcal{C}$ tiene la potencia del continuo.

Ejercicio 23. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en X.

i) Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, probar que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$.

ii) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones de Cauchy en X, probar que la sucesión real $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Distancias a conjuntos

Ejercicio 24. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $A \subseteq X$ no vacío y $x \in X$, se define la *distancia de* x *a* A como $d(x, A) = \inf\{d(x, a) \ / \ a \in A\}$. Probar:

i) $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ para todo par de elementos $x, y \in X$

ii) $x \in A \implies d(x, A) = 0$

iii) $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$

iv) $B(A, r) = \{x \in X \ / \ d(x, A) < r\}$ es abierto para todo $r > 0$

v) $B[A, r] = \{x \in X \ / \ d(x, A) \leq r\}$ es cerrado para todo $r > 0$

Ejercicio 25. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $A, B \subseteq X$ no vacíos se define la *distancia entre* A *y* B por $d(A, B) = \inf\{d(a, b) \ / \ a \in A \ , \ b \in B\}$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

i) $d(A, B) = d(\overline{A}, B)$

ii) $d(A, B) = 0 \iff A \cap B \neq \emptyset$

iii) $d(A, B) = 0 \iff \overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$

iv) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$

Ejercicio 26. Un subconjunto A de un espacio métrico X se dice un G_δ (resp. un F_σ) si es intersección de una sucesión de abiertos (resp. unión de una sucesión de cerrados) de X.

i) Probar que el complemento de un G_δ es un F_σ.

ii) Probar que el complemento de un F_σ es un G_δ.

ii) Probar que todo cerrado es un G_δ. Deducir que todo abierto es un F_σ.

iv) *a*) Exhibir una sucesión de abiertos de $\mathbb{R}$ cuya intersección sea $[0, 1)$. Idem con $[0, 1]$.

b) Exhibir una sucesión de cerrados de $\mathbb{R}$ cuya unión sea $[0, 1)$.

¿Qué conclusión saca de estos ejemplos?