

## PRÁCTICA 4: ESPACIOS MÉTRICOS

## Separabilidad

**Ejercicio 1.** Probar que  $\mathbb{R}^n$  (con la distancia euclídea) es separable.

**Ejercicio 2.** Sea  $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} / \exists n_0 : a_n = 0 \forall n \geq n_0\}$ .

Se considera la aplicación  $d_\infty : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \times \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $d_\infty((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup\{|a_n - b_n| : n \in \mathbb{N}\}$ . Probar que  $(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, d_\infty)$  es un espacio métrico separable.

**Ejercicio 3.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Probar que son equivalentes:

- i)  $X$  es separable
- ii)  $X$  posee una base numerable de abiertos
- iii) Todo cubrimiento abierto de  $X$  tiene un subcubrimiento numerable.

**Ejercicio 4.** Probar que todo subespacio de un espacio métrico separable es separable.

**Ejercicio 5.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico separable. Probar que toda familia de subconjuntos de  $X$  no vacíos, abiertos y disjuntos dos a dos es a lo sumo numerable. Deducir que el conjunto de puntos aislados de  $X$  es a lo sumo numerable.

**Ejercicio 6.** Sean  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  espacios métricos. Probar que  $(X \times Y, d_\infty)$  es separable si y sólo si  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  lo son. Recordar que  $d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\}$ .

**Ejercicio 7.** Probar que  $(\ell^1, d_1)$  es separable.

**Ejercicio 8.** ¿Es el espacio  $(\ell^\infty, d_\infty)$  separable?.

## Complejitud

**Ejercicio 9.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ . Probar:

- i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  si y sólo si para toda subsucesión  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , se cumple que  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$
- ii) Si existe  $x \in X$  para el cual toda subsucesión  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tiene una subsucesión  $(x_{n_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$  tal que  $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_{k_j}} = x$ , entonces  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge y  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$
- iii) Si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente, entonces  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy. ¿Vale la recíproca?

**Ejercicio 10.** Probar que si toda bola cerrada de un espacio métrico  $X$  es un subespacio completo de  $X$ , entonces  $X$  es completo.

**Ejercicio 11.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico.

- i) Probar que todo subespacio completo de  $(X, d)$  es un subconjunto cerrado de  $X$ .
- ii) Probar que si  $X$  es completo, entonces todo subconjunto  $F \subseteq X$  cerrado, es un subespacio completo de  $X$ .

**Ejercicio 12.**

- i) Sea  $X$  un espacio métrico y sea  $B(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ es acotada}\}$ . Probar que  $(B(X), d_\infty)$  es un espacio métrico completo, donde  $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ .
- ii) Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Probar que  $(C[a, b], d_\infty)$  es un espacio métrico completo.
- ii) Sea  $\mathcal{C}_0 = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} / \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0\}$ . Probar que  $(\mathcal{C}_0, d_\infty)$  es un espacio métrico completo.

**Ejercicio 13.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $\mathcal{D} \subset X$  un subconjunto denso con la propiedad que toda sucesión de Cauchy  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$  converge en  $X$ . Probar que  $X$  es completo.

**Teorema de Baire**

**Ejercicio 14.** Probar que  $\mathbb{R}^n$  no puede escribirse como unión numerable de subespacios vectoriales propios.

**Ejercicio 15.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico completo sin puntos aislados y sea  $D$  un subconjunto denso y numerable de  $X$ . Probar que  $D$  no es un  $G_\delta$ .

**Ejercicio 16.** Demostrar que no existe ninguna función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que sea continua sólo en los racionales.  
*Sugerencia:* Para cada  $n \in \mathbb{N}$  considerar

$$U_n = \left\{ x \in \mathbb{R} / \exists U \subseteq \mathbb{R} \text{ abierto con } x \in U \text{ y } \text{diam}(f(U)) < \frac{1}{n} \right\}.$$

**Ejercicio 17.** Sea  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de intervalos de  $[0, 1]$  con extremos racionales y para cada  $n \in \mathbb{N}$  sea

$$E_n = \{f \in C[0, 1] / f \text{ es monótona en } I_n\}.$$

- i) Probar que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $E_n$  es cerrado y nunca denso en  $(C[0, 1], d_\infty)$ .
- ii) Deducir que existen funciones continuas en el intervalo  $[0, 1]$  que no son monótonas en ningún subintervalo.