

## PRÁCTICA 6: COMPACIDAD, CONTINUIDAD UNIFORME

## Compacidad

**Ejercicio 1.**

- i) Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Probar que el conjunto  $\{0\} \cup \{a_n / n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$  es compacto.
- ii) Mostrar que el intervalo  $(0, 1] \subset \mathbb{R}$  no es compacto.
- ii) Sea  $S = (a, b) \cap \mathbb{Q}$  con  $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ . Probar que  $S$  es un subconjunto cerrado y acotado pero no compacto de  $(\mathbb{Q}, d)$ , donde  $d$  es la métrica euclídea de  $\mathbb{R}$ .

**Ejercicio 2.** Probar que todo espacio métrico compacto es separable.

**Ejercicio 3.** Sea  $E = \{e^{(n)} \in \ell^\infty / n \in \mathbb{N}\}$ , donde cada sucesión  $e^{(n)} = (e_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}}$  está definida por

$$e_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 1 & \text{si } k = n \end{cases}$$

Probar que  $E$  es discreto, cerrado y acotado, pero no compacto.

**Ejercicio 4.** Dado un cubrimiento por abiertos  $(U_i)_{i \in I}$  de un espacio métrico  $(X, d)$ , un número  $\varepsilon > 0$  se llama *número de Lebesgue* de  $(U_i)_{i \in I}$  si para todo  $x \in X$  existe  $j \in I$  tal que  $B(x, \varepsilon) \subset U_j$ . Probar que todo cubrimiento por abiertos de un espacio métrico compacto tiene un número de Lebesgue.

**Ejercicio 5.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Probar que:

- i) Toda unión finita y toda intersección (finita o infinita) de subconjuntos compactos de  $X$  es compacta.
- ii) Si  $(X, d)$  es compacto, todo subconjunto cerrado de  $X$  es compacto.
- iii) Un subconjunto  $F \subset X$  es cerrado si y sólo si  $F \cap K$  es cerrado para todo compacto  $K \subset X$ .

**Ejercicio 6.** Sea  $c_0 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} / \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$ . Se define en  $c_0$  la métrica

$$d_\infty(x, y) = \sup\{|x_n - y_n| / n \in \mathbb{N}\}$$

- i) Demostrar que para cada  $x \in c_0$  la bola cerrada  $B[x, 1] = \{y \in c_0 / d_\infty(x, y) \leq 1\}$  no es compacta.
- ii) Probar que  $(c_0, d_\infty)$  es separable.

**Ejercicio 7.** Sean  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  espacios métricos. Probar que  $(X \times Y, d_\infty)$  es compacto si y sólo si  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  lo son.

**Ejercicio 8.** Sea  $K \subset \mathbb{R}$  compacto. Probar que  $K$  tiene mínimo y máximo.

**Ejercicio 9.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $A \subset X$  compacto. Probar que si  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y  $f(x) > 0$  para todo  $x \in A$ , entonces existe  $C > 0$  tal que  $f(x) \geq C$  para todo  $x \in A$ .

**Ejercicio 10.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico.

- i) Sean  $K \subset X$  un compacto y sea  $x \in X - K$ . Probar que existe  $y \in K$  tal que  $d(x, K) = d(x, y)$ ; es decir, la distancia entre  $x$  y  $K$  ‘se realiza’.
- ii) Sean  $F, K \subset X$  dos subconjuntos disjuntos de  $X$  tales que  $F$  es cerrado y  $K$  es compacto. Probar que la distancia  $d(F, K)$  entre  $F$  y  $K$  es positiva.
- iii) Sean  $K_1, K_2 \subset X$  dos subconjuntos compactos de  $X$  tales que  $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ . Probar que existen  $x_1 \in K_1$  y  $x_2 \in K_2$  tales que  $d(K_1, K_2) = d(x_1, x_2)$ ; es decir, la distancia entre  $K_1$  y  $K_2$  ‘se realiza’.

**Ejercicio 11.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico compacto y sea  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  una función semicontinua superiormente. Probar que  $f$  está acotada superiormente en  $X$  y que  $f$  alcanza máximo en  $X$ .

**Ejercicio 12.** Sean  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  espacios métricos y  $f : X \rightarrow Y$  continua y biyectiva. Probar que si  $(X, d)$  es compacto, entonces  $f$  es un homeomorfismo.

**Ejercicio 13.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico compacto. Probar que para cada espacio métrico  $(Y, d')$ , la proyección  $\pi : X \times Y \rightarrow Y$  definida por  $\pi(x, y) = y$  es cerrada si en  $X \times Y$  se considera la métrica  $d_\infty$ .

**Ejercicio 14.** Sean  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  espacios métricos, y sea  $f : X \rightarrow Y$  una función. Probar que si  $Y$  es compacto y el gráfico de  $f$  es cerrado en  $(X \times Y, d_\infty)$ , entonces  $f$  es continua.

**Ejercicio 15.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y abierta.

- i) Probar que  $f$  no tiene extremos locales; es decir, no existen  $x_0 \in \mathbb{R}$  y  $\varepsilon > 0$  tales que  $f(x_0) \leq f(x)$  (resp.  $f(x_0) \geq f(x)$ ) para todo  $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$
- ii) Comprobar que existen  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  tales que  $f(\mathbb{R}) = (a, b)$ .
- iii) Mostrar que  $f : \mathbb{R} \rightarrow (a, b)$  es un homeomorfismo y que ella y su inversa son funciones monótonas.

## Continuidad uniforme

**Ejercicio 16.**

- i) Sea  $f : \mathbb{R}_{\geq a} \rightarrow \mathbb{R}$  una función que es uniformemente continua en  $[a, b]$  y también en  $[b, +\infty)$ . Probar que  $f$  es uniformemente continua en  $\mathbb{R}_{\geq a}$ .
- ii) Deducir que  $\sqrt{x}$  es uniformemente continua en  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ .
- iii) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua y tal que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . Probar que  $f$  es uniformemente continua en  $\mathbb{R}$ .

**Ejercicio 17.** Sean  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  espacios métricos y sea  $f : X \rightarrow Y$  una función que satisface:

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq c d(x_1, x_2)$$

para todo  $x_1, x_2 \in X$ , donde  $c \geq 0$ . Probar que  $f$  es uniformemente continua.

**Ejercicio 18.**

i) Sean  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  espacios métricos,  $A \subseteq X$  y  $f : X \longrightarrow Y$  una función. Probar que si existen  $\alpha > 0$ ,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  sucesiones y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tales que

$$(a) \quad d(x_n, y_n) \longrightarrow 0 \quad \text{para } n \rightarrow \infty$$

$$(b) \quad d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \alpha \quad \text{para todo } n \geq n_0$$

entonces  $f$  no es uniformemente continua en  $A$ .

ii) Verificar que la función  $f(x) = x^2$  no es uniformemente continua en  $\mathbb{R}$ . ¿Y en  $\mathbb{R}_{\leq -\pi}$ ?

iii) Verificar que la función  $f(x) = \sin(1/x)$  no es uniformemente continua en  $(0, 1)$ .

### Ejercicio 19.

i) Sea  $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$  una función uniformemente continua y sea  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de Cauchy en  $X$ . Probar que  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy en  $Y$ .

ii) Sea  $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$  un homeomorfismo uniforme. Probar que  $(X, d)$  es completo si y sólo si  $(Y, d')$  es completo.

En particular, si un espacio métrico  $X$  es completo para una métrica lo es para cualquier otra métrica uniformemente equivalente.

### Ejercicio 20.

i) Dar un ejemplo de una función  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  acotada y continua pero no uniformemente continua.

ii) Dar un ejemplo de una función  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  no acotada y uniformemente continua.

**Ejercicio 21.** Sea  $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$  una función uniformemente continua, y sean  $A, B \subset X$  conjuntos no vacíos tales que  $d(A, B) = 0$ . Probar que  $d'(f(A), f(B)) = 0$ .

**Ejercicio 22.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios métricos,  $Y$  completo. Sea  $D \subset X$  denso y sea  $f : D \longrightarrow Y$  una función uniformemente continua. Probar que  $f$  tiene una única extensión continua a todo  $X$ , es decir, existe una única función  $F : X \longrightarrow Y$  continua tal que  $F|_D = f$ . (Más aún,  $F$  es uniformemente continua).