

PRÁCTICA 7: CONEXIÓN

Conexión

Ejercicio 1. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son conexos:

$$\{x \in \mathbb{R}^2 / 0 < |x| < 2\}, \quad \mathbb{N}, \quad [0, 1), \quad \mathbb{Q}, \quad \{\tfrac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\}$$

$B(a, \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) en un espacio métrico (X, d) .

Ejercicio 2. Dar ejemplos de conjuntos conexos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ tales que $A \cap B$ no sea conexo. Idem para $A - B$.

Ejercicio 3. Sean X un espacio métrico y $C \subset X$

- i) Probar que si C es conexo y x es un punto de acumulación de C entonces $C \cup \{x\}$ es conexo.
- ii) Determinar la validez de las siguientes afirmaciones:
 - (a) Si C es conexo, entonces C° es conexo.
 - (b) Si C es conexo, entonces $\overline{C}$ es conexo.

Ejercicio 4. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $C \subset X$. Probar que son equivalentes:

- i) C es conexo.
- ii) No existen $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ abiertos en X y disjuntos, de modo que $C \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, $C \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ y $C \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$.
- iii) Si $A \subset C$ es no vacío y abierto y cerrado en C , entonces $A = C$.
- iv) Toda función $f : C \rightarrow \{0, 1\}$ continua es constante.

Ejercicio 5. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos conexos de X tal que para cada par de conjuntos $A, B \in \mathcal{A}$ existen $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ que satisfacen $A_0 = A$, $A_n = B$ y $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ para cada $i = 0, \dots, n-1$. Probar que $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ es conexo.

Ejercicio 6. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ continua. Probar que f es constante.

Ejercicio 7. Probar que si $n \geq 2$ no existe un homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 8.

- i) Probar que si $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es continua, existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = x_0$.
- ii) Sea (X, d) un espacio métrico conexo y sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Sean $a, b \in f(X)$ tales que $a \leq b$. Probar que para todo $c \in [a, b]$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = c$. ¿Vale la recíproca?
- iii) Probar que si (X, d) es conexo, entonces $\#X = 1$ o $\#X \geq c$.

Ejercicio 9. Hallar las componentes conexas de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ y de $\mathbb{R}^2$

i) $\arcsen([\frac{\sqrt{2}}{2}, 1])$

iii) $B((-1, 0), 1) \cup B((1, 0), 1)$

ii) $\mathbb{Q}$

iv) $B((-1, 0), 1) \cup B((1, 0), 1) \cup \{(0, 0)\}$

Ejercicio 10. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]$, y sea $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \cup \{(0, 0), (0, 1)\}$. Probar que:

i) $\{(0, 0)\}$ y $\{(0, 1)\}$ son componentes conexas de X

ii) Si $B \subset X$ es abierto y cerrado en X , entonces $\{(0, 0), (0, 1)\} \subset B$ ó $\{(0, 0), (0, 1)\} \cap B = \emptyset$.

Ejercicio 11. Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que las componentes conexas de X son conjuntos cerrados.

Arco Conexión

Ejercicio 12. Sea (X, d) un espacio métrico. Un conjunto $A \subset X$ se dice *arcoconexo* (o *conexo por arcos*) si para todo par de puntos $a, b \in A$ existe una función continua $f : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$.

i) Probar que todo conjunto arcoconexo es conexo.

ii) Exhibir un ejemplo de un conjunto conexo que no sea arcoconexo.

Ejercicio 13. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son arcoconexos:

i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = f(x, y)\}$ donde $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua.

ii) $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B(0, 1)$

iii) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) / x \in \mathbb{R}\}$

iv) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

Ejercicio 14. Sean (X, d) un espacio métrico arcoconexo, (Y, d') un espacio métrico y $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Probar que el conjunto $f(X)$ es arcoconexo.

Ejercicio 15. En el espacio $(C[0, 1], d_\infty)$ se considera el conjunto

$$U = \{f \in C[0, 1] : f(x) \neq 0 \forall x \in [0, 1]\}$$

Probar que U es abierto y hallar sus componentes conexas.