Práctica 8: Espacios Normados

Ejercicio 1. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Probar que se verifican:

1. Las operaciones $+ : E \times E \to E$ y $\cdot : \mathbb{R}(\text{ } o \text{ } \mathbb{C}) \times E \to E$ son continuas.
2. $\overline{B(x,r)} = B[x,r]$ (la clausura de la bola abierta es la bola cerrada).
3. $diam(B(x,r)) = 2r$.

Ejercicio 2. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $C \subset E$. Decimos que C es *convexo* si $\forall\ x, y \in C$ y $\forall\ t \in [0,1]$ se tiene que $tx + (1-t)y \in C$.

1. Probar que $B_r(x)$ es convexo.
2. Probar que si $(C_i)_{i\in I}$ son convexos, entonces $\cap_{i\in I} C_i$ lo es.
3. Probar que si C es convexo, entonces C° lo es.
4. Probar que si C es convexo, entonces $\overline{C}$ lo es.

Ejercicio 3. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $S \subset E$ un subespacio (vectorial). Probar que:

1. $\overline{S}$ también es un subespacio.
2. Si $S \neq E$, entonces $S^o = \emptyset$.
3. Si $dim(S) < \infty$, entonces S es cerrado
4. Si S es un hiperplano, entonces S es o bien denso o bien cerrado en E.

Ejercicio 4. Para cada uno de los siguientes ejemplos de subespacios decidir si son cerrados, si son densos y si son hiperplanos.

1. $c = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} :\ \exists \lim_{n\to\infty} x_n\} \subset l^\infty$
2. $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \to 0\} \subset c$
3. $\mathbb{R}[X]$(polinomios en una variable) $\subset C[0,1]$
4. $C^1[a,b] \subset C[a,b]$

Ejercicio 5. Sean E y F espacios normados. Sea $T : E \to F$ una operador lineal. Probar que son equivalentes:

1. T es continuo en 0.
2. $\exists\ x_0 \in E$ tal que T es continuo en x_0.
3. T es continuo.

4. T es uniformemente continuo.

5. $\exists\ M > 0/\ \forall x \in M\ \ : \|Tx\| \leq M\|x\|$. ($T$ es acotada)

6. $\forall A \subset E$ acotado, $T(A)$ es acotado.

Ejercicio 6. Sean $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ espacios normados. Consideramos

$$L(E, F) = \{T : E \to F/\ T \text{ es lineal y continua}\},$$

y para cada $T\ \in L(E, F)$ sea

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F$$

Probar que:

1. $(L(E, F), \|\cdot\|)$ es un espacio normado.

2. Si F es de Banach entonces $L(E, F)$ también lo es.

Ejercicio 7. Sean E y F espacios normados y sea $T : E \to F$ un operador lineal y continuo. Verificar las siguientes fórmulas:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|<1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \inf\{M/\ \|Tx\| \leq M\|x\|\}$$

Ejercicio 8. Sea $k : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua y sea $K : C[0, 1] \to C[0, 1]$ dada por

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x, y)f(y)dy$$

Probar que K es lineal y continua. Acotar su norma.

Ejercicio 9. Sea $f : (\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, \|.\|_\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n$. Probar que f es lineal pero no es continua.

Ejercicio 10. Sean S, T: $\ell^1 \to \ell^1$, definidos por

$$S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$$

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$$

Probar que S, $T \in \mathcal{L}(\ell^1)$ y calcular sus normas.

Ejercicio 11. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado de dimensión n y sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ un isomorfismo algebraico. Consideramos en $\mathbb{R}^n$ la norma :$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$

1. Probar que $K = \{x \in \mathbb{R}^n\ \ : \|x\|_\infty = 1\}$ es compacto en $\mathbb{R}^n$

2. Probar que existen $c_1,\ c_2 > 0$ tales que para todo $x \in \mathbb{R}^n$:$c_1\|x\|_\infty \leq \|f(x)\|_E \leq c_2\|x\|_\infty$

3. Deducir que si $N_1,\ N_2$ son dos normas en $\mathbb{R}^n$, entonces existen constantes $a, b > 0$ tales que para todo $x \in \mathbb{R}^n : aN_1(x) \leq N_2(x) \leq bN_1(x)$ (esto es: son equivalentes)

Ejercicio 12. Sean E un espacio de Banach y $S,\ T$ subespacios cerrados, con $dim(T) < \infty$. Probar que $S + T$ es cerrado.

Ejercicio 13. (Lema de Riesz) Sean E un espacio normado, $S \subset E$ un subespacio cerrado propio, y $0 < \alpha < 1$. Probar que existe $x_\alpha \in E - S$ tal que $\|x_\alpha\| = 1$ y $\|s - x_\alpha\| > \alpha\ \forall s \in S$. (Sugerencia: Considerar $x \notin S,\ r = d(x, S)$ y $x_\alpha = \frac{(x-b)}{\|x-b\|}$ con $b \in S$ adecuado.)

Ejercicio 14. Sean E un espacio normado de dimensión infinita. Probar que existe $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ tal que $\|\omega_n\| = 1$ y $d(\omega_n, \omega_m) > 1/2,\ n \neq m$. Deducir que $\overline{B(0,1)}$ no es compacta. (Sugerencia: aplicar el lema de Riesz a una sucesión creciente de subespacios de dimensión finita.)

Ejercicio 15. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $H \subset E$ un subespacio. Probar que H es un hiperplano si y sólo existe $\gamma : E \to \mathbb{R}(o\ \mathbb{C})$ lineal , $\gamma \neq 0$ tal que $H = Nu(\gamma)$. Probar que H es cerrado si y sólo si γ es continua.

Ejercicio 16. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. Probar que no puede tener una base algebraica numerable. (Sugerencia: sino se escribiría como unión numerable de subespacios de dimensión finita. Usar el teorema de Baire.)