Práctica 9: Series de Funciones y Convergencia Uniforme.

Series en Espacios Normados.

Ejercicio 1. Sea $(E, \| \ \|)$ un espacio normado. Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ tales que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ convergen. Probar que:

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n + y_n$ converge y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n + y_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$.

ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda x_n$ converge y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda x_n = \lambda \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.

Ejercicio 2. Sea $(B, \| \ \|)$ un espacio de Banach y sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente. Probar que si $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es cualquier función biyectiva, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ también converge y al mismo límite.

Convergencia Uniforme.

Ejercicio 3. Sea (X, d) un espacio métrico y sea A un conjunto. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X^A$ una sucesión de funciones y sea $f : A \to X$. Probar que: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **no** converge uniformemente a f en A si y sólo si existen $\alpha > 0$, una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y una sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset A$ tales que $d(f_{n_k}(a_k), f(a_k)) \geq \alpha$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 4.

i) En cada uno de los casos siguientes, hallar el límite puntual de la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida en el conjunto $A \subset \mathbb{R}$ dado:

(a) $f_n(x) = x^n \qquad A = (-1, 1]$
(b) $f_n(x) = \frac{e^x}{x^n} \qquad A = (1, +\infty)$
(c) $f_n(x) = n^2 x(1 - x^2)^n \qquad A = [0, 1]$

ii) Para la sucesión dada en (a), demostrar que la convergencia es uniforme sobre $B = (0, \frac{1}{2})$.
Idem para la sucesión dada en (b) sobre $B = [2, 5]$.
¿Es uniforme la convergencia de la sucesión dada en (c) sobre A?

Ejercicio 5. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

i) $f_n(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \qquad$ en $\mathbb{R}$

ii) $f_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{n}\right) \qquad$ en $\mathbb{R}$

iii) $f_n(x,y) = \frac{n}{n+1}(x,y)$ en $\mathbb{R}^2$

iv) $f_n(x) = (1+\frac{1}{n})x$ en $[0,1]$

v) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \text{ ó } x = 0 \\ b + \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{a}{b}\ , b > 0 \text{ y } (a:b) = 1 \end{cases}$ en $[0,1]$

vi) $f_n(z) = z^n$ en $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

Ejercicio 6. Sea X un conjunto y sea $B(X) = \{g : X \longrightarrow \mathbb{C} : g \text{ es acotada }\}$.
Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(X)$.

i) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a una función f en X, ¿es cierto que $f \in B(X)$?

ii) Probar que:

(a) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a una función f en X, entonces $f \in B(X)$.

(b) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f si y sólo si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $(B(X), d_\infty)$

(c) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en X, entonces existe $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ $\forall\, x \in X$ y $\forall\, n \in \mathbb{N}$, es decir, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada.

Ejercicio 7. Probar que la sucesión de funciones $f_n(x) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{x(x^2+1)}{1+(n+1)^2x^2}$ $(n \in \mathbb{N})$ converge puntualmente pero no uniformemente, en $\mathbb{R}$, a una función continua.

Ejercicio 8. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de las sucesiones $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2}$ y f_n' en $[-1,1]$.

Ejercicio 9. Sea (X,d) un espacio métrico y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^X$ una sucesión de funciones uniformemente continuas que converge uniformemente a una función f sobre X. Analizar la continuidad uniforme de f.

Ejercicio 10. Sea (X,d) un espacio métrico y sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^X$ dos sucesiones de funciones uniformemente convergentes sobre X a f y g respectivamente. Probar que:

i) $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $f+g$ sobre X.

ii) Si ambas sucesiones están uniformemente acotadas, entonces $(f_n.g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente convergente a $f.g$.

Ejercicio 11. Sea (X,d) un espacio métrico compacto y sea A un conjunto. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^X$ es una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente a una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X^A$ es una sucesión de funciones que converge uniformemente a una función $g : A \longrightarrow X$. Probar que $(f_n \circ g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^A$ converge uniformemente a $f \circ g$.

Ejercicio 12. (Teorema de Dini) Sea (X,d) un espacio métrico compacto y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ tales que:

- $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ $\forall\, x \in X$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.

Probar que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en X.

Ejercicio 13. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ y sea $f : X \to \mathbb{R}$ continua. Probar que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a $x \in X$, la sucesión $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$.

Equicontinuidad.

Ejercicio 14. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones definidas sobre X a valores en Y se dice *equicontinua en* $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \qquad \forall\, f \in \mathcal{F}$$

Se dice que $\mathcal{F}$ es *equicontinua* en X si es equicontinua en x para todo $x \in X$. Finalmente, la familia $\mathcal{F}$ se dice *uniformemente equicontinua* en X si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, y) < \delta \Longrightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \qquad \forall\, f \in \mathcal{F}$$

i) Probar que cualquier conjunto finito de funciones de X en Y continuas en $x_0 \in X$ es equicontinuo en x_0.

ii) Sea $B(X, Y) = \{f : X \longrightarrow Y \ : \ f \text{ es acotada}\}$. Probar que si $A \subset B(X, Y)$ es equicontinuo entonces $\overline{A}$ también.

iii) Supongamos que X es compacto. Probar que:

   (a) Si una familia $\mathcal{F}$ es equicontinua en X, entonces es uniformemente equicontinua.

   (b) Si $f_n : X \longrightarrow Y$ es continua para todo $n \in \mathbb{N}$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en X, entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es equicontinua en X (por lo tanto es uniformemente equicontinua).

   (c) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones uniformemente equicontinua y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f en X, entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en X.

Ejercicio 15. Sean $f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables y uniformemente acotadas. Se define

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, dt \qquad\qquad (a \le x \le b)$$

Probar que existe una subsucesión (F_{n_k}) que converge uniformemente sobre $[a, b]$.

Series de Funciones.

Ejercicio 16. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas definidas sobre un espacio métrico (X, d) a valores en $\mathbb{R}$ tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente sobre X. Probar que:

i) $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ es continua en X.

ii) Si $X = [a,b] \subset \mathbb{R}$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$

Ejercicio 17. (Test de Weierstrass) Sea (X,d) un espacio métrico y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in X$. Probar que si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniforme y absolutamente en X.

Ejercicio 18. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente. Probar que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx)$ convergen uniformemente en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 19.

i) Mostrar que la serie $\operatorname{sen} x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1}$ converge uniformemente sobre todo intervalo finito.

ii) Probar que la función $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)^2$ es continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 20. Sea $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(nx)^2}$.

i) Hallar el dominio de f en $\mathbb{R}$.

ii) ¿Sobre qué intervalos converge uniformemente?

iii) ¿Sobre qué intervalos no converge uniformemente?

iv) ¿Es f continua en su dominio?

v) ¿Es f acotada?