platónicas, la quimera, la esfinge, los anormales números transfinitos (donde la parte no es menos copiosa que el todo), las máscaras, los espejos... - Jorge L. Borges

No one shall expel us from the Paradise that Cantor has created. - David Hilbert

PRÁCTICA 2: CARDINALIDAD

Propiedades básicas de los conjuntos

Ejercicio 1. Demostrar las siguientes igualdades de conjuntos:

(a) $B \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (B \setminus A_i)$.

(b) $B \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (B \setminus A_i)$.

(c) $\bigcup_{i \in I} (A_i \cap B) = B \cap \Big(\bigcup_{i \in I} A_i \Big)$.

Ejercicio 2. Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos y sea $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Hallar una familia de conjuntos $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que verifique simultáneamente:

- $B_n \subseteq A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
- $B_k \cap B_j = \emptyset$ si $k \neq j$.
- $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

Ejercicio 3. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función y sean A y B subconjuntos de X.

(a) Demostrar que:

  I. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
  II. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

(b) Generalizar al caso de uniones e intersecciones infinitas.

(c) Exhibir un ejemplo donde la inclusión en (a) ii. sea estricta.

Ejercicio 4. Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función, $A \subseteq X$ y $B, B_1, B_2 \subseteq Y$. Demostrar que:

(a) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

(b) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

(c) $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$.

(d) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

(e) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

Generalizar (d) y (e) al caso de uniones e intersecciones infinitas.

Ejercicio 5. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que $f(f^{-1}(B)) = B$ para cada $B \subseteq Y$ si y sólo si f es suryectiva.

Ejercicio 6. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que las siguientes propiedades son equivalentes:

(a) f es inyectiva.

(b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ para todos $A, B \subseteq X$.

(c) $f^{-1}(f(A)) = A$ para todo $A \subseteq X$.

(d) $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ para todo par de subconjuntos A, B tales que $A \cap B = \emptyset$.

(e) $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$ para todos $B \subseteq A \subseteq X$.

Ejercicio 7. Para cada subconjunto S de un conjunto A dado se define la *función característica de* S, $\mathcal{X}_S : A \longrightarrow \{0, 1\}$, por

$$\mathcal{X}_S(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in S \\ 0 & \text{si } a \notin S \end{cases} .$$

Probar que:

(a) $\mathcal{X}_{S \cap T} = \mathcal{X}_S \cdot \mathcal{X}_T$ para todo par de subconjuntos $S, T \subseteq A$.

(b) $\mathcal{X}_{A-S} = 1 - \mathcal{X}_S$ para todo $S \subseteq A$.

(c) $\mathcal{X}_S \ + \ \mathcal{X}_T = \mathcal{X}_{S \cup T} \ + \ \mathcal{X}_{S \cap T}$ para todo $S, T \subseteq A$.

Cardinalidad

Ejercicio 8. Demostrar que si A es un conjunto de n elementos, entonces $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos.

Ejercicio 9. Sea A un conjunto. Probar que son equivalentes:

(a) A es infinito (i.e. tiene un subconjunto en biyección con $\mathbb{N}$).

(b) Para todo $x \in A$, existe una función $f_x : A \to A \setminus \{x\}$ biyectiva.

(c) Para todo $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq A$, existe una función $f_{\{x_1,\ldots,x_n\}} : A \to A \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ biyectiva.

Ejercicio 10. Sea A un conjunto numerable. Supongamos que existe una función sobreyectiva de A en un conjunto B. Probar que B es a lo sumo numerable.

Ejercicio 11. Probar que los siguientes conjuntos son numerables (es decir, tienen cardinal $\aleph_0$):

$$\mathbb{Z}_{\leq -1} \quad ; \quad \mathbb{Z}_{\geq -3} \quad ; \quad 3.\mathbb{N} \quad ; \quad \mathbb{Z} \quad ; \quad \mathbb{N}^2 \quad ; \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad ; \quad \mathbb{Q} \quad ; \quad \mathbb{N}^m \quad (m \in \mathbb{N})$$

Ejercicio 12.

(a) Sean A y B conjuntos a lo sumo numerables. Probar que $A \cup B$ es a lo sumo numerable.

(b) Sea $\mathcal{A}$ un conjunto finito y $\mathcal{S} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^m$. Probar que $\#(\mathcal{S}) = \aleph_0$.

Deducir que, cualquiera sea el alfabeto utilizado, hay más números reales que palabras para nombrarlos. ¿Cuántos subconjuntos de $\mathbb{N}^2$ pueden ser definidos en un lenguaje fijo? ¿Cuántos hay en total?

Ejercicio 13. Sean A y B conjuntos, A infinito y B numerable. Probar que existe una biyección entre $A \cup B$ y A.

Ejercicio 14. Probar que el conjunto de todos los polinomios con coeficientes racionales es numerable.

Ejercicio 15. Se dice que un número complejo z es *algebraico* si existen enteros $a_0, \dots, a_n$ no todos nulos, tales que

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = 0$$

(a) Demostrar que el conjunto de todos los números algebraicos es numerable.

(b) Deducir que existen números reales que no son algebraicos.

Nota: Estos números se llaman *trascendentes*.

(c) Probar que, más aún, existen tantos números trascendentes como números reales.

Ejercicio 16. Sea $X \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ un conjunto de números reales positivos. Supongamos que existe una constante positiva C tal que para cualquier subconjunto finito $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ vale $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq C$. Probar que X es a lo sumo numerable.

Ejercicio 17. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función monótona. Probar que:

$$\#(\{x \in \mathbb{R} \;/\; f \text{ no es continua en } x\}) \leq \aleph_0.$$

Ejercicio 18. Probar que si A es un conjunto numerable, el conjunto de las partes finitas de A (es decir, el subconjunto de $\mathcal{P}(A)$ formado por los subconjuntos finitos de A) es numerable.

Ejercicio 19. Hallar el cardinal de los siguientes conjuntos de sucesiones:

(a) $\{(a_n) \;/\; a_n \in \mathbb{N} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$.

(b) $\{(a_n) \subseteq \mathbb{N} \;/\; a_n \leq a_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$.

(c) $\{(a_n) \subseteq \mathbb{N} \;/\; a_n \geq a_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$.

(d) $\{(q_n) \subseteq \mathbb{Q} \;/\; \lim_{n \to \infty} q_n = 0\}$.

(e) $\{(q_n) \subseteq \mathbb{Q} \;/\; (q_n) \text{ es periódica}\}$.

(f) $\{(a_n) \subseteq \mathbb{N} \;/\; 1 \leq a_n \leq m$ para todo $n \in \mathbb{N}\}$. $\qquad (m \in \mathbb{N})$

Ejercicio 20. Hallar el cardinal de los siguientes conjuntos:

(a) $\{I \;/\; I$ es un intervalo de extremos racionales$\}$.

(b) $\{[a, b] \;/\; a, b \in \mathbb{R}\}$.

(c) I , sabiendo que $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{R}$ es una familia de intervalos disjuntos.

(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; 3x + 2y \geq 7\}$.

(e) $\mathbb{R}_{>0}$.

Ejercicio 21. Probar que la unión numerable de conjuntos de cardinal c tiene cardinal c.

Ejercicio 22. Sean a, b, c cardinales. Probar que:

(a) $a.(b + c) = a.b + a.c$

(b) $a^{b+c} = a^b.\, a^c$

(c) $(a^b)^c = a^{bc}$

(d) $(ab)^c = a^c.\, b^c$

(e) Si $b \leq c$, entonces $a^b \leq a^c$ y $b^a \leq c^a$.

Ejercicio 23. Probar que $n^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = c^{\aleph_0} = c$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Ejercicio 24. Se consideran los siguientes conjuntos de funciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbb{R}) &= \{f \;/\; f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\} & \qquad \mathcal{F}(\mathbb{Q}) &= \{f \;/\; f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}\} \\ \mathcal{C}(\mathbb{R}) &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \;/\; f \text{ es continua}\} & \qquad \mathcal{C}(\mathbb{Q}) &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{Q}) \;/\; f \text{ es continua}\} \end{aligned}$$

(a) Probar que $\#(\mathcal{F}(\mathbb{R})) > c$.

(b) Calcular $\#(\mathcal{F}(\mathbb{Q}))$.

(c) Calcular $\#(\mathcal{C}(\mathbb{Q}))$.

(d) Probar que la función $\phi : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{Q})$ dada por $\phi(f) = f|_{\mathbb{Q}}$ es inyectiva. ¿Qué significa esto?

(e) Calcular $\#(\mathcal{C}(\mathbb{R}))$.

Ejercicio 25. Probar que el conjunto de partes numerables de $\mathbb{R}$ (es decir, el subconjunto de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ formado por todos los subconjuntos numerables de $\mathbb{R}$) tiene cardinal c.