

PRÁCTICA 4: ESPACIOS MÉTRICOS

Separabilidad

Ejercicio 1. Probar que $\mathbb{R}^n$ (con la distancia euclídea) es separable.

Ejercicio 2. Sea $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} / \exists n_0 : a_n = 0 \ \forall n \geq n_0\}$. Se considera la aplicación $d_\infty : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \times \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d_\infty((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup\{|a_n - b_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Probar que $(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, d_\infty)$ es un espacio métrico separable.

Ejercicio 3. Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que son equivalentes:

- (a) X es separable.
- (b) X posee una base numerable de abiertos.
- (c) Todo cubrimiento abierto de X tiene un subcubrimiento numerable.

Ejercicio 4. Probar que todo subespacio de un espacio métrico separable es separable.

Ejercicio 5. Sea (X, d) un espacio métrico separable. Probar que toda familia de subconjuntos de X no vacíos, abiertos y disjuntos dos a dos es a lo sumo numerable. Deducir que el conjunto de puntos aislados de X es a lo sumo numerable.

Ejercicio 6. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es separable si y sólo si (X, d) e (Y, d') lo son. Recordar que $d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\}$.

Ejercicio 7. Probar que (ℓ^1, d_1) es separable.

Ejercicio 8. ¿Es el espacio (ℓ^∞, d_∞) separable?

Complejitud

Ejercicio 9. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$. Probar:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ si y sólo si para toda subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, se cumple que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$.
- (b) Si existe $x \in X$ para el cual toda subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(x_{n_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_{k_j}} = x$, entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge y $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.
- (c) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente, entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy. ¿Vale la recíproca?

Ejercicio 10. Probar que si toda bola cerrada de un espacio métrico X es un subespacio completo de X , entonces X es completo.

Ejercicio 11. Sea (X, d) un espacio métrico.

- (a) Probar que todo subespacio completo de (X, d) es un subconjunto cerrado de X .
- (b) Probar que si X es completo, entonces todo subconjunto $F \subseteq X$ cerrado, es un subespacio completo de X .

Ejercicio 12. (Teorema de Cantor). Probar que un espacio métrico (X, d) es completo si y sólo si toda familia $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de X cerrados, no vacíos tales que $F_{n+1} \subseteq F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$ tiene un único punto en la intersección.

Ejercicio 13. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es completo si y sólo si (X, d) e (Y, d') son completos.

Ejercicio 14.

- (a) Sea X un espacio métrico y sea $B(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ es acotada}\}$. Probar que $(B(X), d_\infty)$ es un espacio métrico completo, donde $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$.
- (b) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Probar que $(C[a, b], d_\infty)$ es un espacio métrico completo.
- (c) Sea $\mathcal{C}_0 = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} / \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0\}$. Probar que $(\mathcal{C}_0, d_\infty)$ es un espacio métrico completo.

Ejercicio 15. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\mathcal{D} \subseteq X$ un subconjunto denso con la propiedad que toda sucesión de Cauchy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}$ converge en X . Probar que X es completo.

Teorema de Baire

Ejercicio 16. Probar que $\mathbb{R}^n$ no puede escribirse como unión numerable de subespacios vectoriales propios.

Ejercicio 17. Sean (X, d) un espacio métrico completo sin puntos aislados y sea D un subconjunto denso y numerable de X . Probar que D no es un G_δ .

Ejercicio 18. Demostrar que no existe ninguna función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que sea continua sólo en los racionales.

Sugerencia: Para cada $n \in \mathbb{N}$ considerar el conjunto

$$U_n = \left\{ x \in \mathbb{R} / \exists U \subseteq \mathbb{R} \text{ abierto con } x \in U \text{ y } \text{diam}(f(U)) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Ejercicio 19. Sea $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de intervalos de $[0, 1]$ con extremos racionales y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$E_n = \{f \in C[0, 1] / f \text{ es monótona en } I_n\}.$$

- (a) Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, E_n es cerrado y nunca denso en $(C[0, 1], d_\infty)$.
- (b) Deducir que existen funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$ que no son monótonas en ningún subintervalo.