

PRÁCTICA 9: SERIES DE FUNCIONES Y CONVERGENCIA UNIFORME

Series en Espacios Normados

Ejercicio 1. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ convergen. Probar que:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} x_n + y_n \text{ converge, y } \sum_{n=1}^{\infty} x_n + y_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda x_n \text{ converge, y } \sum_{n=1}^{\infty} \lambda x_n = \lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Ejercicio 2. Sea $(B, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente. Probar que si $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es una función biyectiva, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ también converge y al mismo límite.

Convergencia Uniforme

Ejercicio 3. Sea (X, d) un espacio métrico y sea A un conjunto. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X^A$ una sucesión de funciones y sea $f : A \rightarrow X$. Probar que: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **no** converge uniformemente a f en A si y sólo si existen $\alpha > 0$, una subsucesión $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y una sucesión $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tales que $d(f_{n_k}(a_k), f(a_k)) \geq \alpha$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 4.

(a) En cada uno de los casos siguientes, hallar el límite puntual de la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida en el conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ dado:

$$\text{I. } f_n(x) = x^n, \quad A = (-1, 1]$$

$$\text{II. } f_n(x) = \frac{e^x}{x^n}, \quad A = (1, +\infty)$$

$$\text{III. } f_n(x) = n^2 x(1 - x^2)^n, \quad A = [0, 1]$$

(b) Para la sucesión dada en I., demostrar que la convergencia es uniforme sobre $B = (0, \frac{1}{2})$.

Idem para la sucesión dada en II. sobre $B = [2, 5]$.

¿Es uniforme la convergencia de la sucesión dada en III. sobre A ?

Ejercicio 5. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

(a) $f_n(x) = \frac{\text{sen } nx}{n}$ en \mathbb{R}

(b) $f_n(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{n}\right)$ en \mathbb{R}

(c) $f_n(x, y) = \frac{n}{n+1}(x, y)$ en \mathbb{R}^2

(d) $f_n(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)x$ en $[0, 1]$

(e) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \text{ ó } x = 0 \\ b + \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{a}{b}, b > 0 \text{ y } (a : b) = 1 \end{cases}$ en $[0, 1]$

(f) $f_n(z) = z^n$ en $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

Ejercicio 6. Sea X un conjunto y sea $B(X) = \{g : X \rightarrow \mathbb{C} / g \text{ es acotada}\}$. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B(X)$.

(a) Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a una función f en X , ¿es cierto que $f \in B(X)$?

(b) Probar que:

- I. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a una función f en X , entonces $f \in B(X)$.
- II. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f si y sólo si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f en $(B(X), d_\infty)$.
- III. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en X , entonces existe $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M \forall x \in X$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, es decir, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente acotada.

Ejercicio 7. Probar que la sucesión de funciones $f_n(x) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{x(x^2+1)}{1+(n+1)^2x^2}$ ($n \in \mathbb{N}$) converge puntualmente pero no uniformemente, en \mathbb{R} , a una función continua.

Ejercicio 8. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de las sucesiones $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2}$ y f'_n en $[-1, 1]$.

Ejercicio 9. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^X$ una sucesión de funciones uniformemente continuas que converge uniformemente a una función f sobre X . Analizar la continuidad uniforme de f .

Ejercicio 10. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^X$ dos sucesiones de funciones uniformemente convergentes sobre X a f y g respectivamente. Probar que:

- (a) $(f_n + g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a $f + g$ sobre X .
- (b) Si ambas sucesiones están uniformemente acotadas, entonces $(f_n \cdot g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente convergente a $f \cdot g$.

Ejercicio 11. Sea (X, d) un espacio métrico compacto y sea A un conjunto. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^X$ es una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente a una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ y si $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X^A$ es una sucesión de funciones que converge uniformemente a una función $g : A \rightarrow X$. Probar que $(f_n \circ g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^A$ converge uniformemente a $f \circ g$.

Ejercicio 12. (Teorema de Dini) Sea (X, d) un espacio métrico compacto y sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas de X en \mathbb{R} tales que:

- $f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \forall x \in X \forall n \in \mathbb{N}$.
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Probar que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en X .

Ejercicio 13. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas de X en \mathbb{R} y sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Probar que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a $x \in X$, la sucesión $(f_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $f(x)$.

Equicontinuidad

Ejercicio 14. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Una familia \mathcal{F} de funciones definidas sobre X a valores en Y se dice *equicontinua en $x_0 \in X$* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, x_0) < \delta \implies d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Se dice que \mathcal{F} es *equicontinua en X* si es equicontinua en x para todo $x \in X$. Finalmente, la familia \mathcal{F} se dice *uniformemente equicontinua en X* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, y) < \delta \implies d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

- (a) Probar que cualquier conjunto finito de funciones de X en Y continuas en $x_0 \in X$ es equicontinuo en x_0 .
- (b) Sea $B(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ es acotada}\}$. Probar que si $A \subseteq B(X, Y)$ es equicontinuo entonces \bar{A} también lo es.
- (c) Supongamos que X es compacto. Probar que:
 - I. Si una familia \mathcal{F} es equicontinua en X , entonces es uniformemente equicontinua.
 - II. Si $f_n : X \rightarrow Y$ es continua para todo $n \in \mathbb{N}$ y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en X , entonces $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es equicontinua en X (por lo tanto es uniformemente equicontinua).
 - III. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones uniformemente equicontinua y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a f en X , entonces $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en X .

Ejercicio 15. Sean $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrables y uniformemente acotadas. Se define

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt \quad (a \leq x \leq b)$$

Probar que existe una subsucesión $(F_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que converge uniformemente sobre $[a, b]$.

Series de Funciones.

Ejercicio 16. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas definidas sobre un espacio métrico (X, d) a valores en \mathbb{R} tal que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente sobre X . Probar que:

- (a) $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es continua en X .
- (b) Si $X = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, entonces $\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$.

Ejercicio 17. (Test de Weierstrass) Sea (X, d) un espacio métrico y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in X$. Probar que si $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniforme y absolutamente en X .

Ejercicio 18. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente. Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$ convergen uniformemente en \mathbb{R} .

Ejercicio 19.

(a) Mostrar que la serie $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ converge uniformemente sobre todo intervalo finito.

(b) Probar que la función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)^2$ es continua en \mathbb{R} .

Ejercicio 20. Sea $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(nx)^2}$.

(a) Hallar el dominio de f en \mathbb{R} .

(b) ¿Sobre qué intervalos converge uniformemente?

(c) ¿Sobre qué intervalos no converge uniformemente?

(d) ¿Es f continua en su dominio?

(e) ¿Es f acotada?