Viernes 13 mayo de 2011.

Cálculo Avanzado - 1° Parcial.

Apellido y Nombre: LU:

---

1. Sea, para $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_n = \{[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}] \times [\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}] : l, m \in \mathbb{Z} / 0 \leq l, m < 2^n\}$.

   a) Probar que para todo $x \in [0,1] \times [0,1]$ existe una sucesión de conjuntos $F_n \in \mathcal{F}_n$ tal que $F_{n+1} \subseteq F_n$ y $\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

   b) Hallar el cardinal del conjunto de puntos de $[0,1] \times [0,1]$ para los que hay más de dos elecciones posibles de encajes $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Sea A un conjunto y sea $a = \sharp(A)$, $a \geq 2$.

   a) Probar que $a \geq \aleph_0$ si y sólo si existe $f : A \to A$ tal que para todo $x \in A$, $\sharp(f^{-1}(\{x\})) = a$.

   b) Si $a \geq \aleph_0$, calcular $\sharp\{C \in \mathcal{P}(A) : \sharp C = a\}$.

3. Sean (X, d) un espacio métrico y A un subconjunto de X. Consideramos $B(A, \varepsilon) = \{x \in X : y \in X / d(x, y) < \varepsilon\}$ y $\mathcal{G}_A$ la familia de abiertos que contienen a A. Probar la validez de las siguientes expresiones.

   $$a)\ \overline{A} = \bigcap_{\varepsilon > 0} B(A, \varepsilon). \qquad b)\ A = \bigcap_{G \in \mathcal{G}_A} G.$$

4. Probar que los siguientes espacios son separables.

   a) $C([a,b], \mathbb{R}), d_\infty)$.

   b) $C(K, \mathbb{R}), d_\infty)$ donde K es un compacto de $\mathbb{R}$.

5. Sea $d : l^\infty \times l^\infty \to \mathbb{R}$ definida por $d((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n - a_n|}{2^n}$.

   a) Probar que (l^∞, d) es un espacio métrico separable y que d y d_∞ no son topológicamente equivalentes.

   b) ¿Es completo?