Práctica 3

1. Decir qué propiedades (abierto, cerrado, acotado) tienen los siguientes conjuntos.

   a) $\mathbb{Q}$.
   b) $\mathbb{N}$.
   c) $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.
   d) $(0, 1]$.
   e) $\left\{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$.
   f) $\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

2. Sean S, T subconjuntos de $\mathbb{R}$. Demostrar las propiedades siguientes:

   a) $S^\circ = \{p \in \mathbb{R}^n / \exists \varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \subseteq S\}$.
   b) Si $S \subseteq T$ entonces $S^\circ \subseteq T^\circ$.
   c) $(S \cap T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$. ¿Se puede generalizar esta igualdad a una intersección infinita?
   d) $(S \cup T)^\circ \supseteq S^\circ \cup T^\circ$. ¿Vale la igualdad?
   e) $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$. ¿Se puede generalizar esta igualdad a una unión infinita?
   f) $\overline{S \cap T} \subseteq \overline{S} \cap \overline{T}$. ¿Vale la igualdad?
   g) $(\mathbb{R} - S)^\circ = \mathbb{R} - \overline{S}$.

3. En cada uno de los siguientes casos hallar $S^\circ, \overline{S}$ y ∂S.

   a) $S = [0, 1]$.
   b) $S = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.
   c) $S = [-1, 0) \cup \{1\}$.
   d) $S = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.
   e) $\left\{\frac{(-1)^n n}{1+n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

4. Sea $S \subset \mathbb{R}$.

   a) Demostrar que S es abierto si y solo si es disjunto con ∂S.
   b) Demostrar que S es cerrado si y solo si $\partial S \subset S$.

5. Sea $S \subset \mathbb{R}$, demostrar que $p \in \partial S$ si y sólo si todo entorno de p contiene un punto en S y un punto que no está en S.

6. Si $S \subset \mathbb{R}$ notamos con S' al conjunto de todos los puntos de acumulación de S.

a) Hallar S' para cada uno de los conjuntos del ejercicio 3.

b) Un punto $p \in S$ se dice *punto aislado* de S si existe $\varepsilon > 0$ tal que $(p - \varepsilon, p + \varepsilon) \cap S = \{p\}$. Demostrar que $\overline{S} = S' \cup \{\text{puntos aislados de } S\}$.

7. Hallar los puntos de acumulación del conjunto $S = \left\{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) : n, m \in \mathbb{N}\right\}$. Hallar la adherencia $\overline{S}$.

8. Hallar todos los subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ que son a la vez abiertos y cerrados.

9. Probar que todo conjunto abierto A de $\mathbb{R}$ es la unión de una colección, a lo sumo numerable, de intervalos abiertos, posiblemente no acotados, disjuntos. *Sugerencia.* Sea $\{x_n\}$ una enumeración de los racionales que pertenecen a A. Para cada x_n considerar el conjunto $U_n = \cup I$ donde la unión se toma sobre todos los intervalos abiertos I que están contenidos en A. Probar que U_n es un intervalo abierto no vacío. Finalmente convencerse de que puede extraerse una subcolección $\{U_{n_k}\}$ de intervalos de $\{U_n\}$, disjuntos dos a dos, cuya unión es A.

10. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, se considera el intervalo abierto $I_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$. Demostrar que $(0, 1) = \bigcup_{n \geq 2} I_n$. ¿Existe un conjunto *finito* $\mathcal{F} \subset \mathbb{N}_{\geq 2}$ tal que $(0, 1) = \bigcup_{n \in \mathcal{F}} I_n$? Justificar. ¿Qué puede decir sobre la compacidad del conjunto $(0, 1)$?

11. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son compactos:

    a) $\mathbb{Q}$.

    b) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

    c) $\mathbb{R}$.

    d) $[0, 1]$.

    e) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

    f) $\left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

12. Sean $S, T \subset \mathbb{R}$ conjuntos compactos. Demostrar que $S \cup T$ y $S \cap T$ son compactos. ¿Qué ocurre si se toman uniones o intersecciones infinitas?

13. Sea $S \subset \mathbb{R}$, demostrar que S es un conjunto compacto si y sólo si toda sucesión contenida en S contiene una subsucesión que converge a un punto de S.

14. Mostrar que si K es compacto y F es cerrado, entonces $K \cap F$ es compacto.

15. Determinar todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que tienen la siguiente propiedad: *Todo cubrimiento cerrado tiene un subcubrimiento finito.*

16. Probar la siguiente propiedad: *Si $\{K_\alpha\}$ es una familia de subconjuntos compactos tal que la intersección de toda subfamilia finita de $\{K_\alpha\}$ es no vacía, entonces $\cap_\alpha K_\alpha$ es no vacía. Sugerencia.* Proceder por contradicción. Si no es cierto, sea K_1 algún miembro de $\{K_\alpha\}$, y sean $G_\alpha = \complement K_\alpha$. Entonces $\{G_\alpha\}$ es un cubrimiento abierto de K_1. Continuar.

17. *a*) Mostrar que $\mathbb{Q}$ no es conexo. ¿Qué ocurre con $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$?
    b) ¿Es $\mathbb{R}$ conexo?
    c) Demostrar que el intervalo $[0, 1]$ es conexo.

18. Mostrar ejemplos de conjuntos disconexos, cuya clausura es conexa. Mostrar que si A es conexo, entonces $\overline{A}$ es conexo.

19. Determinar todos los subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$.

20. Un conjunto E es *totalmente disconexo* si, para cualquier par de puntos x e y de E, existen conjuntos separados A y B, con $x \in A$ e $y \in B$, tales que $E = A \cup B$.

    a) Mostrar que $\mathbb{Q}$ es totalmente disconexo.
    b) ¿Es $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ totalmente disconexo?

21. Probar las siguientes afirmaciones sobre el conjunto C de Cantor:

    a) C es compacto.
    b) C es perfecto.
    c) C es totalmente disconexo.

22. Sean $S \subset \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{R}$. Se define la *distancia* $d(p, S)$ entre p y S como

$$d(p, S) := \text{ínf}\{|p - x| : x \in S\}.$$

    a) Demostrar que $|d(p, S) - d(q, S)| \leq d(p, q)$ para todo $p, q \in \mathbb{R}$.
    b) Hallar todos los $p \in \mathbb{R}$ tales que $d(p, S) = 0$.
    c) Demostrar que si S es cerrado la distancia entre un punto p y el conjunto S se realiza, es decir, existe $q \in S$ tal que $d(p, S) = |p - q|$.
    d) Sea $\varepsilon > 0$ y sea $G = \{v \in \mathbb{R} : d(v, S) < \varepsilon\}$. Demostrar que G es abierto.

23. Sean $S, T \subset \mathbb{R}$. Se define la *distancia* entre S y T como

$$d(S, T) = \text{ínf}\{|x - y| : x \in S, y \in T\}.$$

    a) ¿Es cierto que $d(S, T) = \text{ínf}\,\{d(p, T) : p \in S\}$?
    b) Mostrar que no necesariamente siempre existen $p \in S$ y $q \in T$ tales que $d(S, T) = |p - q|$.
    c) ¿Qué ocurre con la pregunta anterior si S y T son compactos? ¿Y si los dos son cerrados? ¿Y si uno es compacto y el otro cerrado no acotado?