Práctica 4

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$ y $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Decidir en cada caso si corresponde $\subseteq, \supseteq$ ó $=$ y probarlo.

$$\begin{array}{cccc}
(i) & f(A \cup B) & \ldots\ldots & f(A) \cup f(B) \\
(ii) & f^{-1}(X \cup Y) & \ldots\ldots & f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) \\
(iii) & f(A \cap B) & \ldots\ldots & f(A) \cap f(B) \\
(iv) & f^{-1}(X \cap Y) & \ldots\ldots & f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \\
(v) & f(\complement A) & \ldots\ldots & \complement(f(A)) \\
(vi) & f^{-1}(\complement X) & \ldots\ldots & \complement(f^{-1})(X)
\end{array}$$

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) = f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{Q}$. Demostrar que f es una función constante. Deducir que dos funciones continuas que coinciden sobre $\mathbb{Q}$ son la misma función.

3. Hallar todos los puntos donde la función f es continua, siendo

   (a) $f : [0, 1] \to [0, 1]$ la función:
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} & \text{si } x = \frac{a}{b} \text{ con } a, b \in \mathbb{Z} \text{ coprimos y } b > 0 \\ \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

4. Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ continua. Demostrar que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$. *Sugerencia.* Considerar la función $x - f(x)$.

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Probar que son equivalentes:

   (a) f es continua (en todo $\mathbb{R}$).

   (b) $f^{-1}(O)$ es abierto para todo $O \subseteq \mathbb{R}$ abierto.

   (c) $f^{-1}(F)$ es cerrado para todo $F \subseteq \mathbb{R}$ cerrado.

6. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y sea $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in K$. Probar que existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in K$.

7. Estudiar la continuidad uniforme de las funciones siguientes:

   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = |x|$.

(b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ siendo $f(x) = x^2$.

(c) $f : (r, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \sqrt{x}$, con $r = 0$ y con $r > 0$.

(d) $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$.

(e) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

(f) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ siendo $f(x) = d(x, S)$, donde $S \subseteq \mathbb{R}$.

8. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto arbitrario y sean $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ funciones uniformemente continuas.

   (a) Probar que $f + g$ es uniformemente continua.

   (b) Mostrar con un ejemplo que $f \cdot g$ no necesariamente es uniformemente continua, aún si alguna de las funciones f ó g es acotada.

   (c) Probar que si $h : f(S) \rightarrow \mathbb{R}$ es otra función uniformemente continua entonces $h \circ f : S \rightarrow \mathbb{R}$ también lo es.

9. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que es uniformemente continua en los intervalos $[a, b]$ y $[b, c]$. Probar que f es uniformemente continua en $[a, c]$.

   ¿Es cierto que si f es una función uniformemente continua sobre un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ y también sobre un conjunto $B \subseteq \mathbb{R}$, entonces lo es en $A \cup B$?

10. *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 y α números reales. Se dice que f es localmente Lipschitz de orden α en el punto x_0 si existen $\varepsilon, M \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que*

$$|f(x) - f(x_0)| < M|x - x_0|^\alpha \quad \textit{para todo } x \quad \textit{tal que } \ 0 < |x - x_0| < \varepsilon.$$

   M se llama la constante de Lipschitz de f. Cuando el orden $\alpha = 1$ decimos, simplemente, que f es Lipschitz.

   (a) Demostrar que si f es localmente Lipschitz de orden $\alpha > 0$ en x_0 entonces f es continua en x_0.

   (b) Mostrar que si f es localmente Lipschitz de orden $\alpha > 1$ en x_0, entonces es derivable en x_0 y $f'(x_0) = 0$.

11. Sea $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Demostrar que f no es Lipschitz pero sin embargo f es uniformemente continua (en particular "*unif. cont. $\not\Rightarrow$ Lipschitz*").

12. Sea $S \subset \mathbb{R}$ y sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función Lipschitz con constante igual a $M < 1$. Demostrar que si S es cerrado, y $f(S) \subseteq S$ entonces existe $y \in S$ tal que $f(y) = y$, en otras palabras, f *tiene un punto fijo*.

    Sugerencia. Considerar la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en S construída recursivamente así: $x_1 \in S$ cualquiera, si x_n está definido se toma $x_{n+1} := f(x_n)$, en otras palabras, $x_{n+1} := f^{(n)}(x_1)$. Demostrar que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy; tomar $y = \lim\limits_{n \rightarrow \infty} x_n$.

    Mostrar con un ejemplo que el resultado es falso si no se supone S cerrado.

13. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función $f(x)=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2}$. Demostrar que f es Lipschitz con $M=1$ pero que f no tiene puntos fijos.

    Sugerencia. Considerar la función $g:K\to\mathbb{R}$ definida como $g(x)=|x-f(x)|$.

14. Considérese el conjunto $\mathbb{Q}\cap(0,1)$. Dado que este conjunto es numerable e infinito se puede escribir: $\mathbb{Q}\cap(0,1)=\{x_1,x_2,...,x_n,...\}$. Se define $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ de la manera siguiente:

$$f(x)=\sum_{n\in\Omega_x}\frac{1}{2^n}$$

    donde $\Omega_x=\{n\in\mathbb{N}:x_n<x\}$.

    Demostrar que:

    (a) f está bien definida.
    (b) f es una función monótona creciente.
    (c) f es discontinua en todo punto del conjunto $\mathbb{Q}\cap(0,1)$; más aún: para todo $n\in\mathbb{N}$ se tiene $f(x_n+)-f(x_n-)=\dfrac{1}{2^n}>0$.
    (d) f es continua a izquierda en todo $x\in(0,1)$; es decir, para todo $x\in(0,1)$ vale que $f(x-)=f(x)$.
    (e) f es continua en todo punto del conjunto $(0,1)-\mathbb{Q}$.

15. En cada uno de los casos siguientes, hallar el límite puntual de la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en el conjunto $S\subset\mathbb{R}$:

    (a) $f_n(c)=x^n$, $S=(-1,1]$.
    (b) $f_n(x)=\dfrac{e^x}{x^n}$, $S=(1,+\infty)$.
    (c) $f_n(x)=n^2x(1-x^2)^n$, $S=[0,1]$.

16. (a) Probar que la sucesión del ejercicio 15(a) converge uniformemente en $T=(0,1/2)$, pero en $S=(-1,1]$ converge puntualmente a una función que no es continua.

    (b) Probar que la sucesión del ejercicio 15(b) converge uniformemente en $T=[2,5]$.

17. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones en los conjuntos indicados:

    (a) $f_n(x)=\frac{\sin(nx)}{n}$, sobre todo $\mathbb{R}$.
    (b) $f_n(x)=\sin(\frac{x}{n})$, sobre todo $\mathbb{R}$.
    (c) $f_n(x)=\frac{n}{n+1}x$, sobre todo $\mathbb{R}$.
    (d) $f_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{n} & \text{si } x\notin\mathbb{Q} \text{ ó } x=0\\ b+\frac{1}{n} & \text{si } x=\frac{a}{b},\ b>0 \text{ y } (a:b)=1\end{cases}$, sobre $[0,1]$.

18. Probar que la sucesión de funciones
$$f_n(x) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{x(x^2+1)}{1+(n+1)^2x^2}$$
converge puntualmente en $\mathbb{R}$ a una función continua, pero la convergencia no es uniforme.

19. Sea $S \subset \mathbb{R}$ y sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $f_n : S \to \mathbb{R}$ que converge uniformemente a una función $f : S \to \mathbb{R}$. Probar que si f_n es acotada para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces vale:
    (a) f es acotada.
    (b) Existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in S$ y todo $n \in \mathbb{N}$ (en otras palabras, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada).

20. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por
$$f_n(x) = n^2x(1-x)^n.$$
    (a) Probar que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a la función cero en el intervalo $[0,1]$.
    (b) Verificar que existe $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$ pero que el lmite no puede 'pasar adentro de la integral'. Es decir, ver que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 (\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))\,dx$

21. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones derivables definidas sobre el intervalo $[a,b]$. Supongamos que $\{f_n'\}$ converge uniformemente en $[a,b]$. Si existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $\{f_n(x_0)\}$ converge, entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[a,b]$.

22. Probar que si $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge uniformemente, entonces $\{g_n\}$ converge uniformemente a cero.

23. Considerar la función $f(x) = \sum \frac{1}{x^2+n^2}$.
    (a) Mostrar que f es continua en $\mathbb{R}$.
    (b) ¿Es f derivable? Si lo es, ¿es h' continua?

24. Considerar la serie
$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots.$$
Hallar el dominio de definición de f y estudiar su continuidad y diferenciabilidad. *Sugerencia.* Para analizar la continuidad en $x = 1$, puede ser útil tener primero una fórmula para f'.

25. Hallar los desarrollos en serie de potencias para las siguientes funciones, y determinar los radios de convergencia.
    (a) $\frac{1}{1+x}$.
    (b) $\frac{1}{(1+x)^2}$.
    (c) $\frac{x}{(1+x^2)^2}$.