

Ejercicios para entregar

Práctica 1

1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ acotado superiormente. Probar que existe una sucesión monótona creciente $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ contenida en A que converge a $s = \sup(A)$.
2. Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada. Sea $r = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$. Probar que $r = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left(\inf_{n \geq k} a_n \right)$.
Ayuda: Se puede usar la siguiente caracterización del límite inferior.

$$r = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \iff \text{dado } \varepsilon > 0, \begin{cases} \text{hay sólo finitos } a_n < r - \varepsilon \\ \text{hay infinitos } a_n < r + \varepsilon \end{cases}$$

3. Probar que todos los siguientes axiomas (de completitud) son equivalentes en \mathbb{R} .

AC : Axioma de completitud (existencia de supremo).

PEI : Principio de encaje de intervalos.

BW : Teorema de Bolzano-Weierstrass.

CC : Las sucesiones de Cauchy convergen.

CM : Convergencia de sucesiones monótonas y acotadas.

Ayuda: En clase se probaron las siguientes implicaciones

$$AC \implies \begin{cases} PEI \\ MC \end{cases} \implies BW \implies CC$$