Ejercicios para entregar

Práctica 2

1. Probar que si $\sum a_n$ es condicionalmente convergente, entonces para cualquier número real A se puede elegir un reordenamiento $\sum b_n$ de $\sum a_n$ tal que $\sum b_n$ converge a A.

   Ayuda. Suponer primero que los a_n son no nulos. Si $\{p_m\}$ y $\{-q_m\}$ son las subsucesiones de $\{a_n\}$ de términos positivos y negativos respectivamente, elegir el reordenamiento:

   $p_1, p_2, \ldots, p_{m_1},\ -q_1, -q_2, \ldots, -q_{n_1},$

   $p_{m_1+1}, p_{m_1+2}, \ldots, p_{m_2},\ -q_{n_1+1}, -q_{n_1+2}, \ldots, -q_{n_2}, \ldots,$

   donde m_1 es el menor natural tal que $p_1 + p_2 + \ldots + p_{m_1} > A$, n_1 es el menor natural tal que $p_1 + \ldots + p_{m_1} - q_1 - \ldots - q_{n_1} < A$, m_2 es el menor natural mayor que m_1 tal que $p_1 + \ldots + p_{m_1} - q_1 - \ldots - q_{n_1} + p_{m_1+1} + \ldots + p_{m_2} > A$, n_2 es el menor natural mayor que n_1 tal que $p_1 + \ldots + p_{m_1} - q_1 - \ldots - q_{n_1} + p_{m_1+1} + \ldots + p_{m_2} - q_{n_1+1} - \ldots - q_{n_2} < A$, y así sucesivamente.

2. Analizar, para cada $\alpha \geq 0$ la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n^\alpha}$$

3. Considerar la función que a cada $x \in \mathbb{R}$ le asigna (cuando existe) el valor de la suma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$. Describir el dominio de esta función y verificar que en ese dominio vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$

   Notar que existe el $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$ pero la serie no converge en $x = 1$.

4. Probar el siguiente teorema, que muestra bajo qué hipótesis adicionales se puede concluir la convergencia de una serie de potencias en el extremo del intervalo de convergencia.

   Teorema. *Sea an una sucesión tal que* $\displaystyle\lim_{n \to \infty} n a_n = 0$. *Supongamos además que la serie* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *tiene radio de convergencia 1. Definamos en el intervalo* $(-1, 1)$ *la función* $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. *Vale entonces que si* $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = s$ *entonces* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$.

Sugerencias:

a) Sea $S_r = \sum_{n=0}^{r} a_n$ la suma parcial de la serie de potencias en $x = 1$. Probar que $\lim_{r\to\infty} S_r - f(1 - \frac{1}{r}) = 0$

b) Para probar *a*), descomponer la serie que define a $f(1 - \frac{1}{r})$ como

$$f\left(1 - \frac{1}{r}\right) = \sum_{n=0}^{r} a_n \left(1 - \frac{1}{r}\right)^n + \sum_{n=r+1}^{\infty} a_n \left(1 - \frac{1}{r}\right)^n$$

c) Usar la siguiente identidad $1 - x^n = (1 - x)(1 + x + x2 + \cdots + x^{n-1})$ y algún valor de x adecuado para acotar

$$\left| S_r - \sum_{n=0}^{r} a_n \left(1 - \frac{1}{r}\right)^n \right|$$

(puede resultar útil el ejercicio 21 de la práctica 1)

d) Acotar el término de la cola de la serie por alguna geométrica conveniente

$$\left| \sum_{n=r+1}^{\infty} a_n \left(1 - \frac{1}{r}\right)^n \right| \leq ??$$