Ejercicios para entregar

Práctica 3

1. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ con A abierto. Probar que si $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$. ¿Qué pasa si A no es abierto?

2. Sea S un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^2$ y $p \in \mathbb{R}^2$ un punto de acumulación de S. Demostrar que $S \cup \{p\}$ es conexo. ¿Vale lo mismo si p no es un punto de acumulación?

3. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Probar que el conjunto
$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$
es compacto.

4.
   a) Construir un subconjunto del $(0, 1)$ que esté formado por puntos aislados pero que no sea cerrado.
   b) ¿Existe $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que el conjunto de puntos de acumulación de A° tenga exactamente dos elementos?
   c) Probar que si $K \subseteq \mathbb{R}$ es compacto, entonces $\overline{K^\circ}$ también lo es.
   d) Construir un conjunto compacto K contenido en $\mathbb{R}$ tal que $\overline{K^\circ} \neq K$.