Ejercicios para entregar

Práctica 4

1. Considerar las siguietes afirmaciones acerca de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

   a) f es uniformemente continua.

   b) Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy entonces $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ también lo es.

   Probar que $a) \Rightarrow b)$ y mostrar con un ejemplo que $b) \nRightarrow a)$

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

   $$f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$$

   Demostrar que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente y encontrar su límite.

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la función $f_n : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ como:

   $$f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} x^j = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n$$

   Se sabe que f_n converge puntualmente a la función $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

   a) Demostrar que la convergencia es uniforme sobre todo compacto K contenido en $(-1, 1)$.

   b) Demostrar que f_n no converge uniformemente a g sobre el intervalo $(-1, 1)$. Puede ser útil usar que $\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n})^n = e^{-1}$.