Práctica 3

Topología

1. Decir qué propiedades (abierto, cerrado, acotado) tienen los siguientes conjuntos.

   (a) $\mathbb{Q}$.
   (b) $\mathbb{N}$.
   (c) $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.
   (d) $(0, 1]$.
   (e) $\left\{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$.
   (f) $\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

2. Sean S, T subconjuntos de $\mathbb{R}$. Demostrar las propiedades siguientes:

   (a) $S^\circ = \{p \in \mathbb{R}^n / \exists \varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \subseteq S\}$.
   (b) Si $S \subseteq T$ entonces $S^\circ \subseteq T^\circ$.
   (c) $(S \cap T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$. ¿Se puede generalizar esta igualdad a una intersección infinita?
   (d) $(S \cup T)^\circ \supseteq S^\circ \cup T^\circ$. ¿Vale la igualdad?
   (e) $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$. ¿Se puede generalizar esta igualdad a una unión infinita?
   (f) $\overline{S \cap T} \subseteq \overline{S} \cap \overline{T}$. ¿Vale la igualdad?
   (g) $(\mathbb{R} - S)^\circ = \mathbb{R} - \overline{S}$.

3. En cada uno de los siguientes casos hallar $S^\circ, \overline{S}$ y ∂S.

   (a) $S = [0, 1]$.
   (b) $S = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.
   (c) $S = [-1, 0) \cup \{1\}$.
   (d) $S = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.
   (e) $\left\{\frac{(-1)^n n}{1+n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

4. Sea $S \subset \mathbb{R}$.

   (a) Demostrar que S es abierto si y sólo si es disjunto con ∂S.
   (b) Demostrar que S es cerrado si y sólo si $\partial S \subset S$.

5. Sea $S \subset \mathbb{R}$, demostrar que $p \in \partial S$ si y sólo si todo entorno de p contiene un punto en S y un punto que no está en S.

6. Si $S \subset \mathbb{R}$ notamos con S' al conjunto de todos los puntos de acumulación de S.

   (a) Hallar S' para cada uno de los conjuntos del ejercicio 3.

   (b) Un punto $p \in S$ se dice *punto aislado* de S si existe $\varepsilon > 0$ tal que $(p - \varepsilon, p + \varepsilon) \cap S = \{p\}$. Demostrar que $\overline{S} = S' \cup \{\text{puntos aislados de } S\}$.

7. Hallar los puntos de acumulación del conjunto $S = \left\{ \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) : n, m \in \mathbb{N} \right\}$. Hallar la adherencia $\overline{S}$.

8. Hallar todos los subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ que son a la vez abiertos y cerrados.

9. Probar que todo conjunto abierto A de $\mathbb{R}$ es la unión de una colección, a lo sumo numerable, de intervalos abiertos, posiblemente no acotados, disjuntos. *Sugerencia.* Sea $\{x_n\}$ una enumeración de los racionales que pertenecen a A. Para cada x_n considerar el conjunto $U_n = \cup I$ donde la unión se toma sobre todos los intervalos abiertos I que están contenidos en A. Probar que U_n es un intervalo abierto no vacío. Finalmente convencerse de que puede extraerse una subcolección $\{U_{n_k}\}$ de intervalos de $\{U_n\}$, disjuntos dos a dos, cuya unión es A.

   Funciones Continuas

10. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$ y $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Decidir en cada caso si corresponde $\subseteq, \supseteq$ ó $=$ y probarlo.

$$\begin{array}{cccc}
(i) & f(A \cup B) & \ldots\ldots & f(A) \cup f(B) \\
(ii) & f^{-1}(X \cup Y) & \ldots\ldots & f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) \\
(iii) & f(A \cap B) & \ldots\ldots & f(A) \cap f(B) \\
(iv) & f^{-1}(X \cap Y) & \ldots\ldots & f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \\
(v) & f(\complement A) & \ldots\ldots & \complement(f(A)) \\
(vi) & f^{-1}(\complement X) & \ldots\ldots & \complement(f^{-1})(X)
\end{array}$$

11. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) = f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{Q}$. Demostrar que f es una función constante. Deducir que dos funciones continuas que coinciden sobre $\mathbb{Q}$ son la misma función.

12. Hallar todos los puntos donde la función f es continua, siendo

   (a) $f : [0, 1] \to [0, 1]$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} & \text{si } x = \frac{a}{b} \text{ con } a, b \in \mathbb{Z} \text{ coprimos y } b > 0 \\ \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

13. Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ continua. Demostrar que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$. *Sugerencia.* Considerar la función $x - f(x)$.

14. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Probar que son equivalentes:

    (a) f es continua (en todo $\mathbb{R}$).
    (b) $f^{-1}(O)$ es abierto para todo $O \subseteq \mathbb{R}$ abierto.
    (c) $f^{-1}(F)$ es cerrado para todo $F \subseteq \mathbb{R}$ cerrado.

15. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y sea $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in K$. Probar que existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in K$.

    Continuidad Uniforme

16. Estudiar la continuidad uniforme de las funciones siguientes:

    (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = |x|$.
    (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = x^2$.
    (c) $f : (r, +\infty) \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \sqrt{x}$, con $r = 0$ y con $r > 0$.
    (d) $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$.
    (e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
    (f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = d(x, S)$, donde $S \subseteq \mathbb{R}$.

17. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto arbitrario y sean $f, g : S \to \mathbb{R}$ funciones uniformemente continuas.

    (a) Probar que $f + g$ es uniformemente continua.
    (b) Mostrar con un ejemplo que $f \cdot g$ no necesariamente es uniformemente continua, aún si alguna de las funciones f ó g es acotada.
    (c) Probar que si $h : f(S) \to \mathbb{R}$ es otra función uniformemente continua entonces $h \circ f : S \to \mathbb{R}$ también lo es.

18. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que es uniformemente continua en los intervalos $[a, b]$ y $[b, c]$. Probar que f es uniformemente continua en $[a, c]$.

    ¿Es cierto que si f es una función uniformemente continua sobre un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ y también sobre un conjunto $B \subseteq \mathbb{R}$, entonces lo es en $A \cup B$?

19. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 y α números reales. Se dice que f es localmente Lipschitz de orden α en el punto x_0 si existen $\varepsilon, M \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que*

    $$|f(x) - f(x_0)| < M|x - x_0|^\alpha \quad \textit{para todo } x \quad \textit{tal que } \; 0 < |x - x_0| < \varepsilon.$$

    M se llama la constante de Lipschitz de f. Cuando el orden $\alpha = 1$ decimos, simplemente, que f es Lipschitz.

    (a) Demostrar que si f es localmente Lipschitz de orden $\alpha > 0$ en x_0 entonces f es continua en x_0.
    (b) Mostrar que si f es localmente Lipschitz de orden $\alpha > 1$ en x_0, entonces es derivable en x_0 y $f'(x_0) = 0$.

20. Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Demostrar que f no es Lipschitz pero sin embargo f es uniformemente continua (en particular "*unif. cont.* $\not\Rightarrow$ *Lipschitz*").

21. Sea $S \subset \mathbb{R}$ y sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz con constante igual a $M < 1$. Demostrar que si S es cerrado, y $f(S) \subseteq S$ entonces existe $y \in S$ tal que $f(y) = y$, en otras palabras, f *tiene un punto fijo.*

    Sugerencia. Considerar la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en S construída recursivamente así: $x_1 \in S$ cualquiera, si x_n está definido se toma $x_{n+1} := f(x_n)$, en otras palabras, $x_{n+1} := f^{(n)}(x_1)$. Demostrar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy; tomar $y = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

    Mostrar con un ejemplo que el resultado es falso si no se supone S cerrado.

22. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2}$. Demostrar que f es Lipschitz con $M = 1$ pero que f no tiene puntos fijos.

    Sugerencia. Considerar la función $g : K \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = |x - f\,(x)\,|$.

23. Considérese el conjunto $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$. Dado que este conjunto es numerable e infinito se puede escribir: $\mathbb{Q} \cap (0, 1) = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Se define $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ de la manera siguiente:

$$f(x) = \sum_{n\in\Omega_x} \frac{1}{2^n}$$

    donde $\Omega_x = \{n \in \mathbb{N} : x_n < x\}$.

    Demostrar que:

    (a) f está bien definida.
    (b) f es una función monótona creciente.
    (c) f es discontinua en todo punto del conjunto $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$; más aún: para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $f(x_n+) - f(x_n-) = \dfrac{1}{2^n} > 0$.
    (d) f es continua a izquierda en todo $x \in (0, 1)$; es decir, para todo $x \in (0, 1)$ vale que $f(x-) = f(x)$.
    (e) f es continua en todo punto del conjunto $(0, 1) - \mathbb{Q}$.

Sucesiones de Funciones

24. En cada uno de los casos siguientes, hallar el límite puntual de la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en el conjunto $S \subset \mathbb{R}$:

    (a) $f_n(c) = x^n$, $S = (-1, 1]$.
    (b) $f_n(x) = \dfrac{e^x}{x^n}$, $S = (1, +\infty)$.
    (c) $f_n(x) = n^2x(1 - x^2)^n$, $S = [0, 1]$.

25. (a) Probar que la sucesión del ejercicio 24(a) converge uniformemente en $T = (0, 1/2)$, pero en $S = (-1, 1]$ converge puntualmente a una función que no es continua.

(b) Probar que la sucesión del ejercicio 24(b) converge uniformemente en $T = [2, 5]$.

26. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones en los conjuntos indicados:

    (a) $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$, sobre todo $\mathbb{R}$.

    (b) $f_n(x) = \sin(\frac{x}{n})$, sobre todo $\mathbb{R}$.

    (c) $f_n(x) = \frac{n}{n+1}x$, sobre todo $\mathbb{R}$.

    (d) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \text{ ó } x = 0 \\ b + \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{a}{b},\ b > 0 \text{ y } (a:b) = 1 \end{cases}$, sobre $[0, 1]$.

27. Probar que la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{x(x^2+1)}{1+(n+1)^2x^2}$$

converge puntualmente en $\mathbb{R}$ a una función continua, pero la convergencia no es uniforme.

28. Sea $S \subset \mathbb{R}$ y sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $f_n : S \to \mathbb{R}$ que converge uniformemente a una función $f : S \to \mathbb{R}$. Probar que si f_n es acotada para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces vale:

    (a) f es acotada.

    (b) Existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in S$ y todo $n \in \mathbb{N}$ (en otras palabras, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada).

29. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de funciones $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = n^2x(1-x)^n.$$

    (a) Probar que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a la función cero en el intervalo $[0, 1]$.

    (b) Verificar que existe $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$ y que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 (\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))\,dx$.

30. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones derivables definidas sobre el intervalo $[a, b]$. Supongamos que $\{f_n'\}$ converge uniformemente en $[a, b]$. Si existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $\{f_n(x_0)\}$ converge, entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[a, b]$.

31. Probar que si $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge uniformemente, entonces $\{g_n\}$ converge uniformemente a cero.

32. Considerar la función $f(x) = \sum \frac{1}{x^2+n^2}$.

    (a) Mostrar que f es continua en $\mathbb{R}$.

    (b) ¿Es f derivable? Si lo es, ¿es h' continua?

33. Considerar la serie
$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots .$$
Hallar el dominio de definición de f y estudiar su continuidad y diferenciabilidad. *Sugerencia.* Para analizar la continuidad en $x = 1$, puede ser útil tener primero una fórmula para f'.

34. Hallar los desarrollos en serie de potencias para las siguientes funciones, y determinar los radios de convergencia.

    (a) $\frac{1}{1+x}$.

    (b) $\frac{1}{(1+x)^2}$.

    (c) $\frac{x}{(1+x^2)^2}$.