Aclaraciones sobre la Clase del 26/3.

En la útima clase estuvimos trabajando con las definiciones de supremo e ínfimo de un conjunto contenido en $\mathbb{R}$. En particular, resolvimos el siguinte problema en el pizarrón:

Ejercicio: Sea $A = \{x \in \mathbb{Q}_{>0} \ : \ x^2 < 2\}$. Probar que A no tiene supremo en $\mathbb{Q}$.

Para probar esto tenemos que mostrar que no existe $s \in \mathbb{Q}$ con la siguiente propiedad: "s es cota superior de A y toda otra cota superior racional p de A satisface $s \leq p$".
Veamos una solución del ejercicio que no involucra el número $\sqrt{2}$.

Solución: Supongamos que existe tal s y tratemos de llegar a un absurdo.
Por la propieded de tricotomía, pasa una y sólo una de estas posibilidades:

$$s^2 = 2, \quad s^2 < 2 \quad \text{o} \quad s^2 > 2. \tag{1}$$

Con el miso razonamiento que utilizamos en la clase para probar que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, se puede ver que la ecuación $s^2 = 2$ no admite solución racional. Esto descarta la primera opción en (1).

Supongamos que $s^2 < 2$. Lo que vamos a hacer ahora es probar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(s + \frac{1}{n})^2 < 2$. Esto implicaría que $s + \frac{1}{n} \in A$ pues $s + \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$ y $(s + \frac{1}{n})^2 < 2$. Luego, como en particular s es cota superior de A, tendríamos $s + \frac{1}{n} \leq s$ y esto es falso.

Veamos que tiene que cumplir un $n \in \mathbb{N}$ para que $(s + \frac{1}{n})^2 < 2$.

Si

$$(s + \frac{1}{n})^2 = s^2 + \frac{2s}{n} + \frac{1}{n^2} < 2,$$

obviamente vale que

$$\frac{2s}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 - s^2. \tag{2}$$

Por otro lado, como $\frac{1}{n} \leq 1$,

$$\frac{2s}{n} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}(2s + \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}(2s + 1). \tag{3}$$

Entonces, si elegimos n tal que $\frac{1}{n} < \frac{2-s^2}{2s+1}$, tenemos que $\frac{1}{n}(2s+1) < 2 - s^2$ y luego, usando (3), vale (2). Por lo tanto, ese n cumple que $(s + \frac{1}{n})^2 < 2$.

Si ahora suponemos que $s^2 > 2$, tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \text{mín}\{s, \frac{s^2-2}{2s}\}$.

Entonces, como $\frac{1}{n} < \frac{s^2-2}{2s}$, $\frac{2s}{n} < s^2 - 2$. Luego,

$$2 < s^2 - \frac{2s}{n} < s^2 - \frac{2s}{n} + \frac{1}{n^2} = (s - \frac{1}{n})^2.$$

En resumen, n cumple que $2 < (s - \frac{1}{n})^2$. Ahora, si $x \in A$, tiene que ocurrir que $x^2 < 2 < (s - \frac{1}{n})^2$ y por como elegimos n vale que $s - \frac{1}{n} > 0$. Luego, $x < s - \frac{1}{n}$ para todo $x \in A$ y entonces $s - \frac{1}{n}$ es cota superior de A. Absurdo!!!, pues $s = \sup(A)$.

Por lo tanto, no puede ser que $s \in \mathbb{Q}$.

□

Durante la resolución de este ejercicio en clase surgió la siguiente pregunta:

¿No alcanza con probar que $\sup(A) = \sqrt{2}$? Donde se entiene de que $\sup(A)$ es la menor de las cotas superiores reales de A.

La respuesta a esta pregunta es si, pero la justificación es muy sutil.

Veamos esta pregunta en un contexto un poco más general.

Pregunta:

Supongamos que tenemos $A \subset \mathbb{Q}$ no vacío y acotado superiormente. Entonces, como en particular $A \subset \mathbb{R}$, existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $s = \sup(A)$.

Ahora, si $s \notin \mathbb{Q}$, ¿podemos afirmar que no existe $t \in \mathbb{Q}$ tal que t sea cota superior de A y que para toda otra cota superior racional p de A valga $t \leq p$?

Respuesta: SI!!!!!!!

Demostración: (de que la respuesta es si!!)

Supongamos que $t \in \mathbb{Q}$ es cota superior de A y para toda otra cota superior racional p de A vale $t \leq p$. Entonces, $t > s$ o $t < s$ (iguales no pueden ser porque $s \notin \mathbb{Q}$).

Si $t > s$, como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, existe $q_0 \in \mathbb{Q}$ tal que $t > q_0 > s$. Pero como s es cota superior de A y $q_0 > s$, q_0 también lo es. Esto es un absurdo pues t era la más chica de las cotas superiores racionales de A.

Si $t < s$, usando el ejercicio 3 de la práctica 1, tenemos que existe $x \in A$ tal que $t < x < s$. Absurdo, pues t es cota superior de A.

Luego, no existe tal t.

□

- Noten que usamos que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ para probar esto!!!