Práctica 1

La Recta Real, Supremo e Ínfimo.

1. Sean a, b, c y d en $\mathbb{R}$. A partir de los axiomas de cuerpo de los números reales demostrar las siguientes propiedades:
   (a) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.
   (b) Si $ab = ac$ y $a \neq 0$ entonces $b = c$.
   (c) Si $ab = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$.
   (d) $(-a)b = -(ab)$ y $(-a)(-b) = ab$.
   (e) $(a/b)(c/d) = (ac)/(bd)$ si $b \neq 0$ y $d \neq 0$.

2. A partir de los axiomas de orden de los números reales probar las siguientes propiedades cualesquiera sean a, b y c en $\mathbb{R}$:
   (a) Si $a < b$ entonces $-b < -a$.
   (b) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.
   (c) Si $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$.
   (d) Si $ab > 0$ entonces a y b son ambos positivos o ambos negativos.
   (e) Si $a^2 + b^2 = 0$, entonces se tiene que $a = b = 0$.
   (f) Si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$.

3. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente. Probar que las siguientes definiciones de supremo de A son equivalentes.
   (a) s verifica que:
      i. $\forall a \in A$ se tiene $s \geq a$;
      ii. si $t \geq a$ para todo $a \in A$, entonces $t \geq s$.
   (b) s verifica que:
      i. $\forall a \in A$, se tiene $s \geq a$;
      ii. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a_\varepsilon \in A$ tal que $s - \varepsilon < a_\varepsilon$.
   (c) s verifica que:
      i. $\forall a \in A$, se tiene $s \geq a$;
      ii. existe una sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ contenida A tal que $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = s$.

   Enunciar equivalencias análogas para el ínfimo de un conjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado inferiormente.

4. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$, dos conjuntos no vacíos, tales que $A \subseteq B$.

    (a) Suponiendo que A y B están acotados superior e inferiormente, establecer y demostrar las relaciones de orden entre los números $\sup(A)$, $\inf(A)$, $\sup(B)$, $\inf(B)$.

    (b) ¿Qué sucede cuando A o B no está acotado superior o inferiormente?

5. Hallar, si existen, supremo e ínfimo de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$. Determinar cuando corresponda, si se trata de un máximo o un mínimo.

    (a) $A_1 = (a, b]$.

    (b) $A_2 = \left\{ \dfrac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N} \right\}$.

    (c) $A_3 = A_2 \cup \{0\}$.

    (d) $A_4 = \left\{ x \in \mathbb{Q}\ : 0 \leq x \leq \sqrt{2} \right\}$.

    (e) $A_5 = \left\{ x^2 - x - 1 \, : \, x \in \mathbb{R} \right\}$.

    (f) $A_6 = \left\{ \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} \, : \, n, m \in \mathbb{N} \right\}$.

    (g) $A_7 = \left\{ x^2 - 5x + 4 \, : \, x \in [2, 4) \right\}$.

6. Para $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y $c \in \mathbb{R}$, se define $c.A = \{c.x : x \in A\}$ y $-A = (-1).A$.

    (a) Probar que si A está acotado superiormente, entonces $-A$ está acotado inferiormente y vale $\inf(-A) = -\sup A$.

    (b) Probar que si $c > 0$ y A está acotado superiormente, entonces $c.A$ también lo está y $\sup(c.A) = c \sup A$.

    (c) ¿Qué se puede decir en el caso que $c < 0$?

    (d) Enunciar resultados análogos a los anteriores para $\inf(c.A)$ (y demuestre alguno(s) si tiene ganas).

7. Dados $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ambos no vacíos se definen

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$$
$$A.B := \{ab : a \in A, b \in B\}$$

    (a) ¿Qué condiciones deben verificar A y B para que exista $\sup(A + B)$? Estudiar la relación entre $\sup(A + B)$ y $\sup(A) + \sup(B)$.

    (b) ¿Es posible dar resultados parecidos a los de la parte (a) para $A.B$ y los números $\sup(AB)$ y $\sup(A). \sup(B)$? ¿Cuáles?

8. Si x es un número real arbitrario, probar que existe un único entero n tal que $n \leq x < n + 1$. Este n se denomina la *parte entera* de x y se designa por $[x]$.

Sucesiones.

9. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

   (a) Probar que

      i. Si $r < L$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > r \ \forall\, n \geq n_0$.

      ii. Si $r > L$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < r \ \forall\, n \geq n_0$.

   (b) ¿Puede reformularse (a) i. si se sabe que $r \leq L$?

   (c) ¿Qué puede decirse de L si se sabe que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > r \ \forall\, n \geq n_0$?

10. Probar que para cada $x \in \mathbb{R}$ existe una sucesión $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ estrictamente decreciente tal que $\lim_{n\to\infty} q_n = x$.

11. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números positivos. Probar que si $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, entonces $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$.

12. Sea la sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente como $b_1 = \sqrt{2}$ y $b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n}$, para $n \geq 1$. Probar que $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona, acotada, y que $b_n < 2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Calcular $\lim_{n\to\infty} b_n$.

13. Sean $x_1 > y_1 > 0$, y para $n \geq 0$, sean $x_{n+1} = (x_n + y_n)/2$, $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$. Mostrar que $y_n \leq x_n$, $y_n < y_{n+1}$, $x_{n+1} < x_n$ y que $0 < x_{n+1} - y_{n+1} < (x_1 - y_1)/2^n$. Deducir entonces que $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$.

14. Hallar los puntos límites de las sucesiones:

    (a) $1 - \dfrac{1}{n}$ (b) $(-1)^n$ (c) $\cos(\dfrac{n\pi}{2})$

    (d) $(-1)^n(2 + \dfrac{3}{n})$ (e) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \ldots$ (f) $\dfrac{n + (-1)^n(2n+1)}{n}$

15. Hallar los límites superior e inferior de las sucesiones del ejercicio anterior.

16. Se tienen sucesiones acotadas de números reales $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

    Enunciar y demostrar las relaciones de orden entre los cuatro números que siguen:

    - $\liminf_{n\to\infty} (a_n + b_n)$
    - $\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n)$
    - $\limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$
    - $\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n$.

17. Probar la siguiente proposición: Un número M es el límite superior de una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ acotada superiormente si, y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$ valen las siguientes propiedades:

(a) Existen infinitos n para los que $a_n > M - \varepsilon$;

(b) Existe solamente una cantidad finita de n para los que $a_n > M + \varepsilon$.

18. (a) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de términos positivos tal que $\limsup_{n\to\infty}(a_{n+1}/a_n) = \theta$, con $\theta < 1$. Probar que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

    (b) Usar el item anterior para probar que

    i. Si $\alpha < 0$ entonces $\lim(\alpha^n/n!) = 0$.

    ii. $\lim(n!/n^n) = 0$.

    iii. Si $0 < \alpha < 1$ y k es un entero, entonces $\lim_{n\to\infty} n^k\alpha^n = 0$.

19. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de las medias aritméticas (promedios) definida como

$$\sigma_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

(a) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, demostrar que $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.

(b) Deducir de (a) que si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales que converge a L entonces $\lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n = L$.

(c) Construir una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que no converge, para la cual $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.

(d) ¿Puede suceder que $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$ mientras que $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$?

(e) Sea $b_n = a_{n+1} - a_n$. Demostrar que si $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = L$ y $\lim_{n\to\infty} nb_n = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.
Sugerencia. Verificar que

$$a_n - \sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} kb_k.$$

20. Sea $x_{n+1} = a/(1 + x_n)$ donde $x_1 > 0$ y $a > x_1^2 + x_1$. Probar que los intervalos $[x_1, x_2], [x_3, x_4], \ldots$ forman un encaje de intervalos, y que el único punto ξ común a todos ellos es una raíz de $x^2 + x = a$.
Sugerencia. Mostrar que $x_{n+1} - x_n$ y $x_n - x_{n-1}$ tienen diferentes signos, y que $|x_{n+1} - x_n| \leq \theta|x_n - x_{n-1}|$ para algún $\theta < 1$.

21. Sea $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de intervalos cerrados, y sea λ_n la longitud de I_n. Supongamos que $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$. Mostrar que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n$ existe y que si $\lim_{n\to\infty} \lambda_n > 0$, entonces $\cap I_n$ es un intervalo cerrado de longitud $\lim_{n\to\infty} \lambda_n$.