Práctica 2

Topología en $\mathbb{R}^n$.

1. *Una función $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ se llama una <u>norma</u> en $\mathbb{R}^n$ si se cumple que:*

   - $N(v) = 0 \Leftrightarrow v = (0, ..., 0)$.
   - $N(\alpha v) = \mid \alpha \mid N(v)$, *para todo* $v \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
   - $N(v + w) \leq N(v) + N(w)$ *para todo* $v, w \in \mathbb{R}^n$.

   Sean

   $$\| (x_1, ..., x_n) \|_1 := \sum_{1 \leq i \leq n} \mid x_i \mid$$
   $$\| (x_1, ..., x_n) \|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} \mid x_i \mid .$$

   Demostrar que las funciones $\| * \|_1$ y $\| * \|_\infty$ son normas.

2. *Una función $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ se llama una <u>distancia</u> en $\mathbb{R}^n$ si se cumple que:*

   - $d(v, w) = 0 \Leftrightarrow v = w$.
   - $d(v, w) = d(w, v)$, *para todo* $v, w \in \mathbb{R}^n$.
   - $d(v, w) \leq d(v, u) + d(u, w)$, *para todo* $v, w, u \in \mathbb{R}^n$.

   (a) Demostrar que si N es una norma en $\mathbb{R}^n$, entonces $d(v, w) := N(v - w)$ es una distancia en $\mathbb{R}^n$.

   (b) Demostrar que si d es una distancia arbitraria en $\mathbb{R}^n$, entonces $D(v, w) := \dfrac{d(v, w)}{1 + d(v, w)}$ también es una distancia.
   [Sug.: Considerar la función monótona creciente $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \dfrac{x}{1 + x}$.]
   Observar que la distancia D tiene la propiedad que $D(v, w) < 1$ para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$.

   (c) Para cada punto $p \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}_{>0}$ se define la bola con centro p y radio r con respecto a la distancia D de la manera natural:

   $$B_D(p, r) := \{x \in \mathbb{R}^n / D(x, p) < r\} .$$

   ¿Que subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es $B_D(p, 1)$? ¿Y $B_D(p, 2)$? Observar entonces que todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es acotado para esta distancia.

(d) Supongamos ahora que d es la distancia usual en $\mathbb{R}^2$ y D es la distancia definida en (b).

i. Dibujar la bola $B_D((0,0),\frac{1}{2})$.

ii. Demostrar que si $p \in \mathbb{R}^n$, entonces para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, existen $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que

$$B(p, r_1) \subseteq B_D(p, \varepsilon) \quad \text{y} \quad B_D(p, r_2) \subseteq B(p, \varepsilon)$$

donde $B(p, r)$ denota la bola canónica de centro p y radio r (es decir, la bola para la distancia usual).

Esto muestra en particular que un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es abierto para la distancia euclídea usual si y sólo si es abierto para la distancia D, a pesar de que todo conjunto es acotado con la ésta última.

3. Decir qué propiedades (abierto, cerrado, acotado) tienen los siguientes conjuntos.

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 1\}$.

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > y\}$.

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, xy > 0\}$.

(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x = y\}$.

4. Sean S, T subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Demostrar las propiedades siguientes:

(a) $S^\circ = \{p \in \mathbb{R}^n / \exists \varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \subseteq S\}$.

(b) Si $S \subseteq T$ entonces $S^\circ \subseteq T^\circ$.

(c) $(S \cap T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$. ¿Se puede generalizar esta igualdad a una intersección infinita?

(d) $(S \cup T)^\circ \supseteq S^\circ \cup T^\circ$. ¿Vale la igualdad?

(e) $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$. ¿Se puede generalizar esta igualdad a una unión infinita?

(f) $\overline{S \cap T} \subseteq \overline{S} \cap \overline{T}$. ¿Vale la igualdad?

(g) $(\mathbb{R}^n - S)^\circ = \mathbb{R}^n - \overline{S}$.

5. En cada uno de los siguientes casos hallar $S^\circ, \overline{S}$ y ∂S.

(a) $S = [0, 1]$.

(b) $S = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

(c) $S = [-1, 0) \cup \{1\}$.

(d) $S = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

(e) $\left\{\frac{(-1)^n n}{1+n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

(f) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

(g) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$

6. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$.

   (a) Demostrar que S es abierto si y sólo si es disjunto con ∂S.

   (b) Demostrar que S es cerrado si y sólo si $\partial S \subset S$.

7. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$, demostrar que $p \in \partial S$ si y sólo si todo entorno de p contiene un punto en S y un punto que no está en S.

8. Si $S \subset \mathbb{R}^n$ notamos con S' al conjunto de todos los puntos de acumulación de S.

   (a) Hallar S' para cada uno de los conjuntos del ejercicio 5.

   (b) Un punto $p \in S$ se dice *punto aislado* de S si existe $\varepsilon > 0$ de forma tal que $B(p, \varepsilon) \cap S = \{p\}$. Demostrar que $\overline{S} = S' \cup \{\text{puntos aislados de } S\}$.

9. Hallar los puntos de acumulación del conjunto $S = \left\{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) : n, m \in \mathbb{N}\right\}$. Hallar la adherencia $\overline{S}$.

10. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, se considera el intervalo abierto $I_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$. Demostrar que $(0,1) = \bigcup_{n \geq 2} I_n$. ¿Existe un conjunto *finito* $\mathcal{F} \subset \mathbb{N}_{\geq 2}$ tal que $(0,1) = \bigcup_{n \in \mathcal{F}} I_n$? Justificar. ¿Qué puede decir sobre la compacidad del conjunto $(0,1)$?

11. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son compactos:

    (a) $\mathbb{Q}$.

    (b) $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.

    (c) $\mathbb{R}$.

    (d) $[0,1]$.

    (e) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

    (f) $\left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

12. Sean $S, T \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos compactos. Demostrar que $S \cup T$ y $S \cap T$ son compactos. ¿Qué ocurre si se toman uniones o intersecciones infinitas?

13. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$, demostrar que S es un conjunto compacto si y sólo si toda sucesión contenida en S contiene una subsucesión que converge a un punto de S.

14. Mostrar que si K es compacto y F es cerrado, entonces $K \cap F$ es compacto.