Práctica 3

Funciones.

1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ y $X, Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Decidir en cada caso si corresponde $\subseteq, \supseteq$ ó $=$ y probarlo.

$$\begin{array}{cccc}
(i) & f(A\cup B) & \ldots\ldots & f(A)\cup f(B) \\
(ii) & f^{-1}(X\cup Y) & \ldots\ldots & f^{-1}(X)\cup f^{-1}(Y) \\
(iii) & f(A\cap B) & \ldots\ldots & f(A)\cap f(B) \\
(iv) & f^{-1}(X\cap Y) & \ldots\ldots & f^{-1}(X)\cap f^{-1}(Y) \\
(v) & f(\mathbb{R}^n\setminus A) & \ldots\ldots & \mathbb{R}^m\setminus f(A) \\
(vi) & f^{-1}(\mathbb{R}^m\setminus X) & \ldots\ldots & \mathbb{R}^m\setminus f^{-1}(X)
\end{array}$$

   En cada caso, pensar hipótesis sobre f para que valga la igualdad.

2. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función continua tal que $f(x) = f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{Q}^n$. Demostrar que f es una función constante. Deducir que dos funciones continuas que coinciden sobre $\mathbb{Q}^n$ son la misma función.

3. Hallar todos los puntos donde la función f es continua, siendo

   (a) $f : [0, 1] \to [0, 1]$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} & \text{si } x = \frac{a}{b} \text{ con } a, b \in \mathbb{Z} \text{ coprimos y } b > 0 \\ \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

4. En cada uno de los siguientes casos, decidir si el conjunto dado es abierto o cerrado (o ninguna de las dos cosas) y probarlo:

   (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y^2(e^x - 1) + yx = 1\}$.

   (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 1 < xy + z < 2\}$.

   (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \sin^2(x) - xy^2 \geq -2\}$.

5. Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ continua. Demostrar que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$. *Sugerencia.* Considerar la función $x - f(x)$.

6. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función continua. Probar que el gráfico de f en un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^{n+m}$.

7. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y sea $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in K$. Probar que existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in K$.

8. Estudiar la continuidad uniforme de las funciones siguientes:

   (a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \|x\|$.

   (b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \|x\|^2$.

   (c) $f : (r, +\infty) \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \sqrt{x}$, con $r = 0$ y con $r > 0$.

   (d) $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$.

   (e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   (f) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = d(x, S)$, donde $d(x, S) = \inf\{\|x - y\| \ : \ y \in S\}$ y $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

9. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto arbitrario y sean $f, g : S \to \mathbb{R}^m$ funciones uniformemente continuas.

   (a) Probar que $f + g$ es uniformemente continua.

   (b) Mostrar con un ejemplo que $f \cdot g$ no necesariamente es uniformemente continua, aún si alguna de las funciones f ó g es acotada.

   (c) Probar que si $h : f(S) \to \mathbb{R}^k$ es otra función uniformemente continua entonces $h \circ f : S \to \mathbb{R}^k$ también lo es.

10. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que es uniformemente continua en los intervalos $[a, b]$ y $[b, c]$. Probar que f es uniformemente continua en $[a, c]$.

    ¿Es cierto que si f es una función uniformemente continua sobre un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ y también sobre un conjunto $B \subseteq \mathbb{R}$, entonces lo es en $A \cup B$?

11. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 y α números reales. Se dice que f es localmente Lipschitz de orden α en el punto x_0 si existen $\varepsilon, M \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que*

$$|f(x) - f(x_0)| < M|x - x_0|^\alpha \quad \textit{para todo } x \quad \textit{tal que} \ \ 0 < |x - x_0| < \varepsilon.$$

    M se llama la constante de Lipschitz de f. Cuando el orden $\alpha = 1$ decimos, simplemente, que f es Lipschitz.

   (a) Demostrar que si f es localmente Lipschitz de orden $\alpha > 0$ en x_0 entonces f es continua en x_0.

   (b) Mostrar que si f es localmente Lipschitz de orden $\alpha > 1$ en x_0, entonces es derivable en x_0 y $f'(x_0) = 0$.

12. Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Demostrar que f no es Lipschitz pero sin embargo f es uniformemente continua (en particular "*unif. cont.* $\not\Rightarrow$ *Lipschitz*").

13. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ y sea $f : S \to \mathbb{R}^n$ una función Lipschitz con constante igual a $M < 1$. Demostrar que si S es cerrado, y $f(S) \subseteq S$ entonces existe $y \in S$ tal que $f(y) = y$, en otras palabras, f *tiene un punto fijo.*

    Sugerencia. Considerar la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en S construída recursivamente así: $x_1 \in S$ cualquiera, si x_n está definido se toma $x_{n+1} := f(x_n)$, en otras palabras, $x_{n+1} := f^{(n)}(x_1)$. Demostrar que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy; tomar $y = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

    Mostrar con un ejemplo que el resultado es falso si no se supone S cerrado.

14. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2}$. Demostrar que f es Lipschitz con $M = 1$ pero que f no tiene puntos fijos.

    Sugerencia. Considerar la función $g : K \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = |x - f(x)|$.

15. Considérese el conjunto $\mathbb{Q} \cap (0,1)$. Dado que este conjunto es numerable e infinito se puede escribir: $\mathbb{Q} \cap (0,1) = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Se define $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ de la manera siguiente:

    $$f(x) = \sum_{n\in\Omega_x} \frac{1}{2^n}$$

    donde $\Omega_x = \{n \in \mathbb{N} : x_n < x\}$.

    Demostrar que:

    (a) f está bien definida.

    (b) f es una función monótona creciente.

    (c) f es discontinua en todo punto del conjunto $\mathbb{Q} \cap (0,1)$; más aún: para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $f(x_n+) - f(x_n-) = \dfrac{1}{2^n} > 0$.

    (d) f es continua a izquierda en todo $x \in (0,1)$; es decir, para todo $x \in (0,1)$ vale que $f(x-) = f(x)$.

    (e) f es continua en todo punto del conjunto $(0,1) - \mathbb{Q}$.