Práctica 4

Funciones de Variación Acotada

1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Para cada partición π de $[a, b]$ se define

$$\pi(f) := \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|,$$

   si $\pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

   Demostrar que si $\pi_1 \subset \pi_2$ son dos particiones de $[a, b]$, entonces $\pi_1(f) \leq \pi_2(f)$.

2. Estudiar si las funciones que siguen son de variación acotada en el intervalo $[a, b]$ correspondiente y en el caso afirmativo dar una mayoración para $V_f(a, b)$.

   (a) $f(x) = \cos(x)$ en $[0, 3\pi]$

   (b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

   (c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ en $[-1, 2]$

   (d) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)^2 & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

   En el caso (d) estudiar también la derivabilidad de f.

3. Demostrar que si f y g son funciones de variación acotada en $[a, b]$ entonces fg también lo es.

4. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada y continua en el punto $x_0 \in [a, b]$.

   (a) Demostrar que vale: $V_a^{x_0} f = \sup_{x<x_0} V_a^x f = \inf_{x>x_0} V_a^x f$.

   (b) Deducir de (a) que la función v_f es continua en x_0.

   Demostrar a partir de (b) y de la descomposición $f = v_f - (v_f - f)$ que toda función continua y de variación acotada sobre un intervalo $[a, b]$ es una diferencia de funciones monótonas estrictamente crecientes y continuas sobre $[a, b]$.

5. Para las funciones de variación acotada que siguen, hallar la función V_f (recordamos que $V_f(a) = 0$ y $V_f(x) = V_f(a, x)$ si $a < x \leq b$):

   (a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & -1 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ 1 - x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

   (b) $f(x) = \sin x$ en $[0, 2\pi]$

   Para cada función encontrar explícitamente funciones monótonas crecientes g_1 y g_2 tales que $f = g_1 - g_2$.

6. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función de variación acotada, sean $x,y\in[a,b]$ con $x<y$. Demostrar que $V_a^y f\leq V_a^x f+V_x^y f$ (sug.: usar el ejercicio 1).

   En la clase teórica ya se vió la desigualdad opuesta, con lo que se tiene la fórmula aditiva:
$$V_a^y f=V_a^x f+V_x^y f.$$

7. Aplicar el ejercicio anterior para calcular $V_a^b f$ en el caso de las funciones de los ítems (a) y (c) del ejercicio 2.

8. Demostrar que si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función de variación acotada entonces es integrable Riemann.

9. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función de clase C^1 en $[a,b]$.

   (a) Demostrar que f es de variación acotada.

   (b) Demostrar que vale la igualdad $V_f(a,b)=\int\limits_a^b |f'(x)|\ dx$.

Integral de Riemann-Stieltjes

10. Analizar en cada caso la existencia de $\int\limits_a^b f\ d\alpha$ y en los casos afirmativos calcularla.

    (a) $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función arbitraria y f una función constante sobre $[a,b]$.

    (b) $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua con $\alpha(a)=a_0$, $\alpha(b)=b_0$; sea $c\in(a,b)$ y sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ la función $\quad f(x):=\begin{cases} 5 & \text{si } x\in[a,c) \\ 3 & \text{si } x=c \\ -1 & \text{si } x\in(c,b]\end{cases}$.

    ¿Qué sucede si en lugar de tomar α continua sólo se sabe que α es continua en un entorno de c?

    (c) f como en el ítem anterior y $\alpha(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\in[a,c] \\ -1 & \text{si } x\in(c,b]\end{cases}$.

    (d) $f(x)=x^3$, $\alpha(x)=x^2$ y $[a,b]=[-1,3]$.

    (e) $f(x)=\alpha(x)=\cos(x)$ y $[a,b]=[0,\frac{\pi}{4}]$.

11. Supongamos que $\int\limits_a^b f d\alpha$ existe y es igual a 0 para toda función monótona creciente f. ¿Qué puede decir sobre la función α? *Sugerencia.* Para cada $c\in[a,b]$ considere la función monótona f_c definida como $f_c(x)=0$ si $a\leq x\leq c$ y $f_c(x)=1$ sino.

12. Sean $f,\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}$. Para cada partición $\pi=\{x_0,...,x_n\}$ del intervalo $[a,b]$, se define $s_\pi:=\sum\limits_{k=1}^{n} f(t_k)[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})]$, donde $t_k\in[x_{k-1},x_k]$.

    Demostrar que si $f\in\Re(\alpha)$ entonces existe una sucesión de particiones $\{\pi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ que cumple las condiciones:

(a) $\{\pi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es monótona en el sentido siguiente: si $m < m'$ entonces $\pi_m \subset \pi_{m'}$.

(b) $\lim\limits_{m\to\infty} \| \pi_m \| = 0$.

(c) $\lim\limits_{m\to\infty} s_{\pi_m} = \int\limits_a^b f\ d\alpha$, independientemente de la elección de los t_k en cada suma s_{π_m}.

(d) Si $\{\sigma_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es otra sucesión monótona de particiones tal que $\pi_m \subset \sigma_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, entonces cumple las condiciones (b) y (c) precedentes.

Si ahora $g, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ son otras funciones, tales que $g \in \Re(\beta)$ y para cada partición π notamos $r_\pi := \sum\limits_{k=1}^{n} g(t_k)[\beta(x_k) - \beta(x_{k-1})]$, donde $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, deducir que entonces existe una sucesión de particiones $\{\pi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{m\to\infty} s_{\pi_m} = \int\limits_a^b f d\alpha$ y $\lim\limits_{m\to\infty} r_{\pi_m} = \int\limits_a^b g\ d\beta$.

13. Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ y sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ monótona creciente. Demostrar que si $f, g \in \Re(\alpha)$ y $f(x) \leq g(x)$, entonces $\int\limits_a^b f\ d\alpha \leq \int\limits_a^b g\ d\alpha$.

14. Sean $f; \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ y sea $c \in (a,b)$ tales que $\int\limits_a^c f\ d\alpha$ y $\int\limits_c^b f\ d\alpha$ existen. Demostrar que $\int\limits_a^b f d\alpha$ también existe y que vale la igualdad: $\int\limits_a^c f\ d\alpha + \int\limits_c^b f\ d\alpha = \int\limits_a^b f\ d\alpha$.

15. Para cada $x \in \mathbb{R}$ denotamos por $[x]$, la parte entera de x.

Analizar la existencia de las integrales que siguen y en caso afirmativo calcularla:

(a) $\int\limits_0^4 x^2\ d([x])$ (b) $\int\limits_0^2 x\ d(x - [x])$ (c) $\int\limits_0^2 x^2\ d(|x|)$

16. Sea $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ tales que f es una función continua y α es de variación acotada.

(a) Demostrar que $|f| \in \Re(V_\alpha)$.

(b) Demostrar que vale la desigualdad $\left|\int_a^b f\ d\alpha\right| \leq \int\limits_a^b |f|\ dV_\alpha$. *Sugerencia.* Tener en cuenta el ejercicio 12.

(c) Deducir de (b) que $\left|\int_a^b f\ d\alpha\right| \leq V_\alpha(a,b) \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

(d) Para cada $x \in [a,b]$ se define $\psi(x) = \int_a^x f\ d\alpha$ (observar que ψ está bien definida). Probar que ψ es de variación acotada.