

Práctica 5

Series.

1. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n-1}{2n^2+3}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{10n}}$.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$.

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3+n^2}$.

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+3}$.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

2. (*) Demostrar la desigualdad

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}$$

3. Si $r_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$, demostrar que r_n converge.

4. Hallar la suma de las siguientes series:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-2}}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$

5. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-4n+2}{n!}$.

Sugerencia: descomponer el término general en la forma

$$\frac{3n^2 - 4n + 2}{n!} = \frac{A}{n!} + \frac{B}{(n-1)!} + \frac{C}{(n-2)!}$$

6. Decidir para cada una de las siguientes series, cuántos primeros términos hay que tomar para que su suma no difiera más que en $1/10^6$ de la suma de la serie completa.

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$.
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$.
7. ¿Es cierto que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son dos series divergentes, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ es divergente?
8. Probar el siguiente teorema de Abel: Si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de números positivos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$.
- Sugerencia.* $n a_{2n} \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n} \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$, y similarmente para $n a_{2n+1}$.
9. Probar el siguiente criterio de convergencia (condensación de Cauchy): Sea $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de números no negativos. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n b_{2^n}$ converge.
10. Decir si las siguientes series convergen condicional o absolutamente:
- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}$.
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$.
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 - 2n - 1}{n!}$.
11. (a) Mostrar que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge. ¿Vale este resultado si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge sólo condicionalmente?
- (b) ¿Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $a_n \geq 0$, se puede concluir algo de $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$?
12. Probar el siguiente criterio de Dirichlet: Sea $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión monótona decreciente de números positivos, con $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tales que las sumas parciales $S_n = a_1 + \dots + a_n$ satisfacen $S_n \leq K$, donde K es una constante. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ es convergente.
- Sugerencia.* $\sum_{m=1}^n a_m b_m = S_1(b_1 - b_2) + S_2(b_2 - b_3) + \dots + S_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + S_n b_n$ (esta es una "fórmula de sumación por partes").
13. Verificar las fórmulas para todo θ que no es múltiplo de 2π :

$$\begin{aligned} \sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta &= \frac{\sin(n\theta/2) \sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \\ \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta &= \frac{\sin(n\theta/2) \cos((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \end{aligned}$$

14. Sea $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de números positivos, con $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Usando los dos ejercicios anteriores, mostrar que, si θ no es múltiplo de 2π , las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\theta, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta$$

son convergentes. Así, por ejemplo, las series $\sum_{n=1}^{\infty} (\cos n\theta)/n^\alpha$ y $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin n\theta)/n^\alpha$ son convergentes para $\alpha > 0$.

15. Sea $|\alpha| < 1$. Mostrar que

$$1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + \cdots + n\alpha^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-\alpha)^2}.$$

16. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son series convergentes (no necesariamente absolutamente), ¿es la serie producto (de Cauchy) convergente?

Sugerencia. Considerar $a_n = b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$.

17. Hallar los valores de x para los cuales convergen las series:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right)$
- (e) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$
- (f) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+1)^n$