

Práctica No. 1

1. A partir de las siguientes propiedades de orden de los números reales:

- i) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq b$, se tiene que $a < b$ ó $b < a$.
- ii) Si $a < b$, entonces $\forall c, a + c < b + c$.
- iii) Si $0 < a$ y $0 < b$ entonces $0 < ab$.
- iv) Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.

Mostrar los siguientes hechos:

- (a) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
- (b) Si $a < b$ entonces $-b < -a$.
- (c) Si $x \neq 0$ entonces $x^2 > 0$.
- (d) Si $x^2 + y^2 = 0$, entonces se tiene que $x = y = 0$.

2. Sea A un subconjunto no vacío de \mathbb{R} acotado superiormente. Probar que son equivalentes las siguientes definiciones alternativas del supremo de A .

- (a) s verifica que:
 - i. $\forall a \in A$ se tiene $s \geq a$;
 - ii. si $t \geq a$ para todo $a \in A$, entonces $t \geq s$.
- (b) s verifica que:
 - i. $\forall a \in A$, se tiene $s \geq a$;
 - ii. $\forall \varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon \in A$ tal que $s - \varepsilon < a_\varepsilon$.
- (c) s verifica que:
 - i. $\forall a \in A$, se tiene $s \geq a$;
 - ii. existe una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contenida en A tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$.

Enunciar equivalencias análogas para el ínfimo (y si le costaron los ítems anteriores demuestre alguna).

3. Sean A y $B \subseteq \mathbb{R}$, dos conjuntos no vacíos, tales que $A \subseteq B$.
- Suponiendo que A y B están acotados superior e inferiormente, establecer y demostrar las relaciones de orden entre los números $\sup(A)$, $\inf(A)$, $\sup(B)$, $\inf(B)$.
 - ¿Qué sucede cuando A o B no está acotado superior o inferiormente?
4. Hallar, si existen, supremo, ínfimo, máximo y mínimo de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} :
- $A_1 = (a, b]$.
 - $A_2 = \left\{ \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N} \right\}$.
 - $A_3 = A_2 \cup \{0\}$.
 - $A_4 = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$.
 - $A_5 = \{x^2 - x - 1 : x \in \mathbb{R}\}$.
 - $A_6 = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$.
 - $A_7 = \{x^2 - 5x + 4 : x \in [2, 4)\}$.
5. Dado $A \subset \mathbb{R}$ no vacío se definen, para cada $c \in \mathbb{R}$, $c.A = \{c.x : x \in A\}$ y $-A = (-1).A$.
- Probar que si A está acotado superiormente, entonces $-A$ está acotado inferiormente y vale $\inf(-A) = -\sup A$.
 - Probar que si $c > 0$ y A está acotado superiormente, entonces $c.A$ también lo está y $\sup(c.A) = c \sup A$.
 - ¿Qué se puede decir en el caso que $c < 0$?
 - Enunciar resultados análogos a los anteriores para $\inf(c.A)$ (y demuestre alguno(s) si tiene ganas).

6. Dados $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ambos no vacíos se definen

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

$$A.B := \{ab : a \in A, b \in B\}$$

- ¿Qué condiciones deben verificar A y B para que exista $\sup(A + B)$? Estudiar la relación entre $\sup(A + B)$ y $\sup(A) + \sup(B)$.
- ¿Es posible dar resultados parecidos a los de la parte (a) para $A.B$ y los números $\sup(A.B)$ y $\sup(A).\sup(B)$? ¿Cuáles?

7. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.
- Probar que
 - Si $r < L$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > r \forall n \geq n_0$.
 - Si $r > L$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < r \forall n \geq n_0$.
 - ¿Puede reformularse (a) i. si se sabe que $r \leq L$?
 - ¿Qué puede decirse de L si se sabe que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > r \forall n \geq n_0$?
8. Probar que para cada $x \in \mathbb{R}$ existe una sucesión $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ estrictamente decreciente tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = x$.
9. Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales no negativos tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$.
10. Sea $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de intervalos cerrados encajados acotados y para cada n sea λ_n la longitud de I_n .
- Demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$ existe.
 - Demostrar que si $L := \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n > 0$, entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ es un intervalo cerrado de longitud L .
11. Se define recursivamente la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como sigue:
- $$x_1 > 0 \quad x_{n+1} := a/(1 + x_n),$$
- donde $a > x_1^2 + x_1$.
- Probar que los intervalos cerrados $[x_n, x_{n+1}]$ forman un encaje de intervalos con un único punto común ξ .
 - Probar que ξ es raíz del polinomio $X^2 + X - a$.
- [Pruebe que $x_{n+1} - x_n$ y $x_n - x_{n-1}$ tiene signos diferentes y que $|x_{n+1} - x_n| \leq \theta |x_n - x_{n-1}|$ para $0 \leq \theta < 1$ adecuado.]
12. Dada una sucesión de números reales $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y un número $\alpha \in \mathbb{R}$, se dice que α es un *punto límite* de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si y sólo si existe una subsucesión $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \alpha$.

Hallar los puntos límites de las sucesiones:

- | | | |
|---|---|---------------------------------------|
| (a) $1 - \frac{1}{n}$ | (b) $(-1)^n$ | (c) $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ |
| (d) $(-1)^n \left(2 + \frac{3}{n}\right)$ | (e) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \dots$ | (f) $\frac{n + (-1)^n(2n + 1)}{n}$ |

13. Hallar los límites superior e inferior de las sucesiones del ejercicio anterior.

14. Se tienen sucesiones acotadas de números reales $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Enunciar y demostrar las relaciones de orden entre los cuatro números que siguen:

- $\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$
 - $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$
 - $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$
 - $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$.
-