Práctica No. 3

1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ y $X, Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Decidir en cada caso si corresponde $\subset, \supset$ ó $=$ y probarlo.

$$\begin{array}{cccc}
(i) & f(A \cup B) & \ldots\ldots & f(A) \cup f(B) \\
(ii) & f^{-1}(X \cup Y) & \ldots\ldots & f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) \\
(iii) & f(A \cap B) & \ldots\ldots & f(A) \cap f(B) \\
(iv) & f^{-1}(X \cap Y) & \ldots\ldots & f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \\
(v) & f(\mathbb{R}^n - A) & \ldots\ldots & \mathbb{R}^m - f(A) \\
(vi) & f^{-1}(\mathbb{R}^m - X) & \ldots\ldots & \mathbb{R}^n - f^{-1}(X)
\end{array}$$

2. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $f : S \to \mathbb{R}^m$. Probar que f es continua si y sólo si para todo cerrado $F \subseteq \mathbb{R}^m$ existe un cerrado $W_F \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(F) = W_F \cap S$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función continua tal que $f(x) = f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{Q}^n$. Demostrar que f es una función constante. Deducir que dos funciones continuas que coinciden sobre $\mathbb{Q}^n$ son la misma función.

4. Hallar todos los puntos donde la función f es continua, siendo

   (a) $f : [0, 1] \to [0, 1]$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b} & \text{si } x = \dfrac{a}{b} \text{ con } a, b \in \mathbb{Z} \text{ coprimos y } b > 0 \\ \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

5. En cada uno de los siguientes casos, decidir si el conjunto dado es abierto o cerrado (o ninguna de las dos cosas) y probarlo:

   (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y^2(e^x - 1) + yx = 1\}$.
   (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 1 < xy + z < 2\}$.
   (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \sin^2(x) - xy^2 \geq -2\}$.

6. Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ continua. Demostrar que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$. [Sug.: considere la función continua $x - f(x)$.]

7. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función continua. Probar que el gráfico de f es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^{n+m}$. ¿Vale la recíproca?

8. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y sea $f : K \to \mathbb{R}^m$ una función tal que la imagen de f es un conjunto acotado y el gráfico de f es un conjunto cerrado. Demostrar que f es continua.

9. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y sea $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in K$. Probar que existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in K$.

10. Estudiar la continuidad uniforme de las funciones siguientes:

    (a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \| x \|$.

    (b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \| x \|^2$.

    (c) $f : (r, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ siendo $f(x) = (\sqrt{x}, \cos x)$, con $r = 0$ y con $r > 0$.

    (d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ siendo $f(x, y) = x^2 + 3y$.

    (e) $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$.

11. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto arbitrario y sean $f, g : S \to \mathbb{R}^m$ funciones uniformemente continuas.

    (a) Probar que $f + g$ es uniformemente continua.

    (b) Mostrar con un ejemplo que $f \cdot g$ no necesariamente es uniformemente continua.

    (c) Probar que si $h : f(S) \to \mathbb{R}^k$ es otra función uniformemente continua entonces $h \circ f : S \to \mathbb{R}^k$ también lo es.

12. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que es uniformemente continua en los intervalos $[a, b]$ y $[b, c]$. Probar que f es uniformemente continua en $[a, c]$.

    ¿Es cierto que si f es una función uniformemente continua sobre un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y también sobre un conjunto $B \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces lo es en $A \cup B$?

13. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0y α números reales. Se dice que f es localmente Lipschitz de orden α en el punto x_0 si existen $\varepsilon, M \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que

    $$|f(x) - f(x_0)| < M|x - x_0|^\alpha \quad \textit{para todo } x \quad \textit{tal que} \;\; 0 < |x - x_0| < \varepsilon.$$

    (a) Demostrar que si f es localmente Lipschitz de orden $\alpha > 0$ en x_0 entonces f es continua en x_0.

    (b) Demostrar que si f es localmente Lipschitz de orden $\alpha > 1$ en x_0 entonces f es derivable en x_0.

14. Demostrar que las siguientes funciones son uniformemente continuas:

    (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

    (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ siendo $f(x) = (\cos x, \sin x)$.

15. Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Demostrar que f no es Lipschitz pero sin embargo f es uniformemente continua (en particular "*unif. cont.* $\not\Rightarrow$ *Lipschitz*").

16. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ y sea $f : S \to \mathbb{R}^n$ una función Lipschitz. En particular, existe $M \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\| f(x) - f(x') \| \leq M \| x - x' \|$, $\forall x, x' \in S$. Demostrar que si S es cerrado, $M < 1$ y $f(S) \subseteq S$ entonces existe $y \in S$ tal que $f(y) = y$, en otras palabras, *f tiene un punto fijo.*

    [Sug.: considere la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en S construída recursivamente así: $x_1 \in S$ cualquiera, si x_n está definido se toma $x_{n+1} := f(x_n)$, en otras palabras, $x_{n+1} := f^{(n)}(x_1)$. Demostrar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy; tomar $y = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.]

    Mostrar con un ejemplo que el resultado es falso si no se supone S cerrado.

17. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2+1}}{2}$. Demostrar que f es Lipschitz con $M = 1$ pero que f no tiene puntos fijos.

18. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacto y $f : K \to K$ una función que verifica que la desigualdad $\| f(x) - f(x') \| < \| x - x' \|$ vale para todo $x, x' \in K$ (en particular, f es Lipschitz con $M = 1$).

    (a) Demostrar que f tiene un punto fijo.

    (b) Comparar con los ejercicios 6, 16 y 17.

    [Sug.: considere la función $g : K \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = \| x - f(x) \|$.]
