Práctica No. 4

1. Analizar en cada caso la existencia de $\int_a^b f \, d\alpha$ y calcularla cuando exista.

   (a) $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función arbitraria y f constante sobre $[a,b]$.

   (b) $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua con $\alpha(a) = a_0$, $\alpha(b) = b_0$; sea $c \in (a,b)$ y sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ la función $f(x) := \begin{cases} 5 & \text{si } x \in [a,c) \\ 3 & \text{si } x = c \\ -1 & \text{si } x \in (c,b] \end{cases}$.

   ¿Qué sucede si en lugar de tomar α continua sólo se sabe que α es continua en c?

   (c) f como en el ítem anterior y $\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a,c] \\ -1 & \text{si } x \in (c,b] \end{cases}$.

   (d) $f(x) = x^3$, $\alpha(x) = x^2$ y $[a,b] = [-1,3]$.

   (e) $f(x) = \alpha(x) = \cos(x)$ y $[a,b] = [0, \frac{\pi}{4}]$.

2. Supongamos que $\int_a^b f d\alpha$ existe y es igual a 0 para toda función monótona creciente f. ¿Qué puede decir sobre la función α? [Sug.: para cada $c \in [a,b]$ considere la función monótona f_c definida como $f_c(x) = 0$ si $a \leq x \leq c$ y $f_c(x) = 1$ sino.]

3. Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$. Para cada partición $\pi = \{x_0, ..., x_n\}$ del intervalo $[a,b]$, se define $s_\pi := \sum_{k=1}^{n} f(t_k)[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})]$, donde $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

   (a) Demostrar que si $f \in \Re(\alpha)$ entonces existe una sucesión de particiones $(\pi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ que cumple todas las condiciones siguientes:

      i. $(\pi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es monótona en el sentido siguiente: si $m < m'$ entonces $\pi_m \subset \pi_{m'}$.

      ii. $\lim_{m\to\infty} \| \pi_m \| = 0$.

      iii. $\lim_{m\to\infty} s_{\pi_m} = \int_a^b f \, d\alpha$, independientemente de la elección de los t_k en cada suma s_{π_m}.

      iv. Si $(\sigma_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es otra sucesión monótona de particiones tal que $\pi_m \subset \sigma_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, entonces cumple las condiciones ii. y iii. precedentes.

(b) Si ahora $g, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ son otras funciones, tales que $g \in \Re(\beta)$ y para cada partición π notamos $r_\pi := \sum\limits_{k=1}^{n} g(t_k)[\beta(x_k) - \beta(x_{k-1})]$, donde $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, deducir que entonces existe una sucesión de particiones $(\pi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{m\to\infty} s_{\pi_m} = \int\limits_a^b f d\alpha$ y $\lim\limits_{m\to\infty} r_{\pi_m} = \int\limits_a^b g\ d\beta$.

4. *Otra definición de integral de Riemann-Stieltjes* [1]

Con las mismas notaciones que en el ejercicio anterior: *sean* $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$, *diremos que* f *es* integrable Riemann-Stieltjes$^\bigstar$ *con respecto a la función* α *(notaremos* $f \in \Re^\bigstar(\alpha)$*) si se cumple: existe un* $A \in \mathbb{R}$ *tal que para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $| s_\pi - A | < \varepsilon$ *para toda partición* π *con* $\| \pi \| < \delta$*, independientemente de los valores de* t_k*. En este caso diremos que* A es la integral de Riemann-Stieltjes$^\bigstar$ *de* f *respecto a* α*.*

(a) Demostrar que $\Re^\bigstar(\alpha) \subseteq \Re(\alpha)$.

(b) Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ definidas así: si $c \in (a,b)$ entonces $f(x) = \alpha(x) = 0$ para $a \leq x < c$, $f(x) = \alpha(x) = 1$ para $c < x \leq b$, $f(c) = 0$ y $\alpha(c) = 1$. Demostrar que $f \in \Re(\alpha)$ pero que $f \notin \Re^\bigstar(\alpha)$.

[Sug.: considere particiones π tales que $c \in \pi$ para ver que $f \in \Re(\alpha)$ y particiones π' tales que $c \notin \pi'$ para ver que $f \notin \Re^\bigstar(\alpha)$.]

5. Sean $f; \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ y sea $c \in (a,b)$ tales que $\int\limits_a^c f\ d\alpha$ y $\int\limits_c^b f\ d\alpha$ existen.

Demostrar que $\int\limits_a^b f d\alpha$ también existe y que vale la igualdad: $\int\limits_a^c f\ d\alpha + \int\limits_c^b f\ d\alpha = \int\limits_a^b f\ d\alpha$.

6. Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ y sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ monótona creciente.

Demostrar que si $f, g \in \Re(\alpha)$ y $f(x) \leq g(x)$, entonces $\int\limits_a^b f\ d\alpha \leq \int\limits_a^b g\ d\alpha$.

7. Para cada $x \in \mathbb{R}$ denotamos con $\lfloor x \rfloor$ a la parte entera de x, es decir: $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} \ / \ n \leq x\}$. Analizar la existencia de las integrales que siguen y en caso afirmativo calcularla:

(a) $\int\limits_0^4 x^2\ d(\lfloor x \rfloor)$ (b) $\int\limits_0^2 x\ d(x - \lfloor x \rfloor)$ (c) $\int\limits_0^2 x^2\ d(|x|)$

[1] De la parte (b) de este ejercicio se deduce que la definición de integral de Riemann-Stieltjes$^\bigstar$ no es equivalente a la dada en clase; sin embargo la mayoría de las propiedades generales se preservan con ligeras modificaciones.