Práctica No. 5

1. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Para cada partición π de $[a,b]$ se define

$$\pi(f) := \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|,$$

si $\pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

Demostrar que si $\pi_1 \subset \pi_2$ son dos particiones de $[a,b]$, entonces $\pi_1(f) \leq \pi_2(f)$.

2. Estudiar si las funciones que siguen son de variación acotada en el intervalo $[a,b]$ correspondiente y en el caso afirmativo dar una mayoración para $V_a^b f$.

(a) $f(x) = \cos(x)$ en $[0, 3\pi]$ (b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ en $[-1, 2]$ (d) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

En el caso (d) estudiar también la derivabilidad de f.

3. Demostrar que si f y g son funciones de variación acotada en $[a,b]$ entonces fg también lo es.

4. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada, sean $x, y \in [a,b]$ con $x < y$. Demostrar que $V_a^y f \leq V_a^x f + V_x^y f$ (sug.: usar el ejercicio 1).

En la clase teórica ya se vió la desigualdad opuesta, con lo que se tiene la fórmula aditiva:

$$V_a^y f = V_a^x f + V_x^y f.$$

5. Aplicar el ejercicio anterior para calcular $V_a^b f$ en el caso de las funciones de los ítems (a) y (c) del ejercicio 2.

6. Para las funciones de variación acotada que siguen, hallar la función v_f (recordamos que $v_f(x) := V_a^x f$):

(a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ 1-x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ (b) $f(x) = \sin x$ en $[0, 2\pi]$

Para cada función encontrar explícitamente funciones monótonas crecientes g_1 y g_2 tales que $f = g_1 - g_2$.

7. Demostrar que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función de variación acotada entonces es integrable Riemann.

8. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en $[a, b]$.

   (a) Demostrar que f es de variación acotada.

   (b) Demostrar que vale la igualdad $V_a^b f = \int\limits_a^b |f'(x)| \, dx$.

9. Sea $f, \alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ tales que f es una función continua y α es de variación acotada.

   (a) Demostrar que $| \ f \ | \in \Re(v_\alpha)$.

   (b) Demostrar que vale la desigualdad $\left| \int_a^b f \ d\alpha \right| \leq \int\limits_a^b |f| \ dv_\alpha$. [Sug.: ejercicio 3, práctica 4.]

   (c) Deducir de (b) que $\left| \int_a^b f \ d\alpha \right| \leq \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)| \, V_a^b \alpha$.

   (d) Para cada $x \in [a, b]$ se define $\psi(x) = \int_a^x f \ d\alpha$ (observar que ψ está bien definida). Probar que ψ es de variación acotada.
