

Práctica No. 6

1. Estudiar la convergencia de las siguientes series numéricas:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3n - 1}{2n^2 + 3}.$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{10n}}. \text{ [Considerar la integral impropia divergente } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{10x}}.]$$

$$(d) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}. \text{ [Considerar la integral impropia divergente } \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln(x)}.]$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}.$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}.$$

$$(g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3+n^2}.$$

$$(h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n + 3}.$$

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$(j) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(n)}.$$

2. Demostrar la desigualdad

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}.$$

3. Si $r_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$, demostrar que r_n converge.

4. Hallar la suma de las siguientes series:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-2}}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$$

5. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 - 4n + 2}{n!}$.

[Sugerencia: descomponer el término general de la serie en la forma $\frac{3n^2 - 4n + 2}{n!} = \frac{A}{n!} + \frac{B}{(n-1)!} + \frac{C}{(n-2)!}$, para $A, B, C \in \mathbb{R}$ adecuados.]

6. En cada una de las series que siguen calcular la cantidad de términos hay que sumar para que su suma difiera no más que en $1/10^6$ de la suma de la serie correspondiente.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

7. ¿Es cierto que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son dos series divergentes, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ es divergente?

8. Probar el siguiente teorema de Abel: Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de números positivos tal que $\sum a_n$ converge, entonces $na_n \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$.

[Sugerencia: $na_{2n} \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n} \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$, y similarmente para na_{2n+1} .]

9. Probar el siguiente criterio de convergencia (condensación de Cauchy): Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de números no negativos. Entonces la serie $\sum a_n$ converge si y sólo si la serie $\sum 2^n a_{2^n}$ converge.

10. Decidir si las siguientes series convergen condicional o absolutamente:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n 2^n}$.

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 - 2n - 1}{n!}$

11. (a) Mostrar que si $\sum a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum a_n^2$ converge. ¿Vale este resultado si $\sum a_n$ converge sólo condicionalmente?

(b) ¿Si $\sum a_n$ converge y $a_n \geq 0$, se puede concluir algo de $\sum \sqrt{a_n}$?

12. Probar el siguiente criterio de Dirichlet: Sea $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión monótona decreciente de números positivos, con $\lim b_n = 0$. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tales que existe $K > 0$ y las sumas parciales $S_n = a_1 + \dots + a_n$ satisfacen $|S_n| \leq K$. Entonces la serie $\sum a_n b_n$ es convergente.

[Sugerencia: $\sum_{n=1}^N a_n b_n = S_1(b_1 - b_2) + S_2(b_2 - b_3) + \dots + S_{N-1}(b_{N-1} - b_N) + S_N b_N$].

13. (a) Sea $\theta \in \mathbb{R}$ no múltiplo entero de 2π . Probar que las sucesiones $(\sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ y $(\cos(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ verifican la condición de la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ del ejercicio anterior.

(b) Sea $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de números positivos, con $\lim b_n = 0$. Mostrar que si θ no es múltiplo entero de 2π , las series

$$\sum b_n \cos n\theta \quad \text{y} \quad \sum b_n \sin n\theta$$

son ambas convergentes.

Así, por ejemplo, las series $\sum (\cos n\theta)/n^\alpha$ y $\sum (\sin n\theta)/n^\alpha$ son convergentes para todo $\alpha > 0$.

14. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ con $|\alpha| < 1$. Mostrar que

$$1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + \dots + n\alpha^{n-1} + \dots = \frac{1}{(1 - \alpha)^2}.$$

15. Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series convergentes (no necesariamente absolutamente), ¿es la serie producto (de Cauchy) convergente?

[Sugerencia: Considerar $a_n = b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, con $n \geq 1$.]

16. Hallar los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales convergen las series:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n + \sqrt{n}}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right)$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} n!(x+1)^n$$

$$(g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}$$
